Interrogation n°3. *Barème sur 24 pts*

1) a) [0.5 pt] Donner sans justification le $DL_2(0)$ de $g(u) = \sqrt{1+u}$.

b) [2 pts] Déterminer le $DL_2(0)$ de $f(x) = \sqrt{\cos(x) + \ln(1+x)}$ sous la forme $f(x) = a + bx + cx^2 + \mathfrak{o}\left(x^2\right)$.

2) [1.5 pt] On pose $\forall x > 0,\ f(x) = \ln\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+3x+4}}\right)$.

Donner un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et un équivalent de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+.

3) *Remarque* : On pourra supposer connue *sans justification* la valeur de $\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \dfrac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\,(\dfrac{1}{n})\right)^n$.

a) [0 pt] Que valent $\tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\tan'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$?

b) [2 pts] On considère $x_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)$ et $y_n = \left(\tan\left(\dfrac{\pi}{4}x_n\right)\right)^n$. Déterminer $L = \lim_{n\to+\infty} y_n$.

4) [1.5 pt] On considère f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 \text{ si } x = 0 \end{cases}$

Montrer que f est dérivable en 0. L'application f' est-elle de classe C^1 ?

5) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ telle que $f(0) = 0,\ f'(0) = 1$.

On suppose qu'il existe $p = \min\{n \geq 2 \mid f^{(n)}(0) \neq 0\}$ et que $f^{(p)}(0) < 0$.

On a donc $f''(0) = f^{(3)}(0) = ... = f^{(p-1)}(0) = 0$ et $f^{(p)}(0) < 0$. On pose $\lambda = -f^{(p)}(0)$, et on a $\lambda > 0$.

a) [1.5 pt] Montrer qu'il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in]0, a],\ 0 < f(x) < x$.

Suggestion : Utiliser des équivalents en 0^+.

b) [2 pts] Déterminer un réel $\alpha > 0$ tel que $\dfrac{1}{f(x)^\alpha} - \dfrac{1}{x^\alpha}$ converge vers un réel non nul μ lorsque x tend vers 0^+.

Conseil : Utiliser un DA de $\dfrac{1}{f(x)^\alpha}$ en utilisant le DL de $(1+h)^{-\alpha}$.

c) [2 pts] On considère une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in]0, a]$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.

Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0^+ et donner *sans justification* (en supposant connu le théorème de Cesàro) un équivalent de u_n (exprimé en fonction de n, α et μ).

6) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $\boxed{P_n(x) = x^3 + n(x^2 - 1)}$.

On *admet* que P_n admet une unique racine réelle positive, qu'on note x_n.

a) [0.5 pt] Justifier que $x_n \in [0, 1]$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\lim_{n\to+\infty} x_n = 1^-$. *Suggestion* : Considérer $0 < a < 1$ et $P_n(a)$.

c) [1.5 pt] Déterminer un DL de x_n de la forme $x_n = 1 + \dfrac{\lambda}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

7) [1 pt] Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^1, avec $a < b$. Pour $a \leq x < y \leq b$, on pose $\Delta(x, y) = \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x}$.

On note $A = \{\Delta(x, y), \quad a \leq x < y \leq b\}$ l'ensemble des pentes de f. Montrer que $\sup(A) = \sup(f')$.

8) [1.5 pt] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles strictement positives.

On suppose $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = 1 + \dfrac{\alpha}{n} + \mathfrak{o}\,(\dfrac{1}{n})$ et $\dfrac{b_{n+1}}{b_n} = 1 + \dfrac{\beta}{n} + \mathfrak{o}\left(\dfrac{1}{n}\right)$, avec $\boxed{\alpha < \beta}$.

a) Montrer que pour n assez grand, on a : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq \dfrac{b_{n+1}}{b_n}$.

b) En déduire que $a_n = O(b_n)$.

9) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^2. On pose $\boxed{M = \sup |f'|}$.

a) [1 pt] On considère $[a, b]$ un segment inclus dans $[0, 1]$.

En utilisant l'inégalité des accroissements finis, démontrer : $\left|\int_a^b f(t)\ dt - (b - a)f(b)\right| \leq \dfrac{1}{2}(b - a)^2 M$.

b) [1 pt] On considère une subdivision $\sigma = (x_0, x_1, ..., x_n)$ de $[0, 1]$, c'est-à-dire $\boxed{0 = x_0 < x_1 < ... < x_n = 1}$.

Le pas de la subdivision est défini par $\boxed{\Delta = \max_{1\leq k\leq n}(x_k - x_{k-1})}$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})^2 \leq \Delta$$

et préciser les cas d'égalité.

c) [0.5 pt] Avec les notations du b), on pose $S = \sum_{k=1}^{n}(x_k - x_{k-1})f(x_k)$ (somme de Riemann)

Montrer que $\left|\int_0^1 f(t)\ dt - S\right| \leq \dfrac{1}{2}\ \Delta\ M$.

10) [1 pt] (★) On note ici $f(x) \prec\prec g(x)$ pour signifier $f(x) = \mathfrak{o}_{+\infty}(g(x))$.

Proposer sans justification une fonction $f(x)$ telle que lorsque x tend vers $+\infty$, on a

$$\forall \alpha > 0, \quad x^\alpha \prec\prec f(x) \prec\prec \exp(\alpha x)$$

11) [1.5 pt] (★)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = 0$ et $\lambda = f''(0) > 0$. Montrer qu'il existe un cercle Γ (de rayon non nul) à la fois tangent au graphe de f en $(0, 0)$ et situé au-dessus du graphe de f.

Indication : Démontrer une inégalité de la forme $\forall x \in [-r, r]$, $x^2 + f(x)^2 \geq 2rf(x)$, où $r > 0$.