

Interrogation n°2. Corrigé

1) Par le TAF, toute pente est une dérivée, donc $D \subset \Delta$.

Par définition, toute dérivée est une limite de pentes, donc $\Delta \subset \overline{D}$.

Exemple : Avec $f(x) = x^2$ sur $[0, 1]$, on a $\Delta = [0, 2]$ et $D =]0, 2[$.

2) a) On a $\frac{x-1}{x+1} = 1 - \frac{2}{x+1}$, donc $F(x) = x - 2 \ln(|x+1|)$.

b) Avec $u = e^x$ c'est-à-dire $x = \ln u$,

$$\int_0^1 \frac{dx}{e^x + 1} = \int_1^e \frac{dx}{u(u+1)} = \int_1^e \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du = \left[\ln \left(\frac{u}{u+1} \right) \right]_1^e = \ln \left(\frac{e}{e+1} \right) + \ln 2 = \ln \left(\frac{2e}{e+1} \right).$$

3) a) On a $f'(x) \sim \frac{1}{2} \lambda x^2$ et $f'(x) \sim \lambda x$.

b) f est strictement positive au voisinage de 0^+ . Comme f est croissante, on a $\forall x \in]0, 1]$, $f(x) > 0$.

Donc g est de classe C^1 sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions de classe C^1 .

$$\text{On a aussi } \forall x > 0, g'(x) = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}} \sim \frac{\sqrt{2}\lambda x}{2\sqrt{\lambda x^2}} = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}.$$

Par le th de la limite de la dérivée (et prolongement C^1), g est C^1 sur $[0, 1]$ et $g'(0) = \sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

Remarque : La dérivabilité de g en 0 peut aussi se déduire du $DL_1(0)$ de $g(x) = \sqrt{f(x)} \sim \sqrt{\frac{\lambda}{2}}x$.

4) $\frac{1}{n} S_n$ est une somme de Riemann de $x \mapsto x^p$ fonction continue sur $[0, 1]$.

$$\text{Donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} S_n = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}, \text{ donc } S_n \sim \frac{n}{p+1}.$$

5) On a : $\frac{f(c) - f(a)}{c - a} = \lambda \frac{f(b) - f(a)}{b - a} + (1 - \lambda) \frac{f(c) - f(b)}{c - b}$, où $\lambda = \frac{b - a}{c - a} \in [0, 1]$.

6) a) On a $x = \lim_{n \rightarrow +\infty} k_n a_n$, où $k_n = \left\lfloor \frac{x}{a_n} \right\rfloor \in \mathbb{Z}$. Ainsi, $k_n a_n \in A$.

b) On vérifie aisément que $\forall n \in \mathbb{Z}$, $f(x + n) = f(x)$. Or, tout réel x s'écrit $x = r + n$, où $r \in [0, 1[$.

Ainsi, $f(\mathbb{R}) = f([0, 1])$. Comme $[0, 1[\subset [0, 1] \subset \mathbb{R}$, alors $f(\mathbb{R}) = f([0, 1])$.

Or, par continuité, $f([0, 1])$ est un segment. Donc f est bien bornée et atteint ses bornes.

c) On a $\forall (n, m) \in \mathbb{Z}^2$, $f(x + n + m\sqrt{2}) = f(x)$. Ainsi, $\forall a \in A$, $f(a) = f(0)$.

Comme A est dense, tout réel x est limite d'une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de A .

Donc par continuité de f , on a $f(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f(a_n) = f(0)$. Ainsi, f est constante.

7) a) Supposons par l'absurde $|z| < 1$. On a $|a_0| = \left| -\sum_{k=1}^n a_k z^k \right| < \sum_{k=1}^n |a_k|$, d'où une contradiction.

b) On a $P(X) = (X - 1)P(X) = -b_0 + \sum_{k=1}^n (b_{k-1} - b_k)X^k + b_n X^{n+1}$.

$$\text{On a } \sum_{k=1}^n |b_{k-1} - b_k| + |b_n| \leq \sum_{k=1}^n (b_{k-1} - b_k) + b_n = b_0 = |b_0|.$$

Par a), les racines complexes de P sont de module ≥ 1 , donc a fortiori les racines de Q aussi.

8) a) L'application $F : x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est une bijection strictement croissante de $[a, b]$ sur $[0, M]$.

Donc pour tout $\theta \in [0, 1]$, on a $\theta M \in [0, M]$, donc il existe un unique réel x tel que $F(x) = \theta M$.

b) On a $F(x(\theta)) = \theta M$, donc $x(\theta) = F^{-1}(\theta M)$.

On sait par le cours de sup que F^{-1} est de classe C^1 (car F bijection de classe C^1 et $F' = f > 0$).

Donc x est de classe C^1 , et on a $x'(\theta) = \frac{M}{F'(F^{-1}(\theta M))} = \frac{M}{f(x(\theta))}$.

Remarque : Si on sait que x est C^1 , on peut aussi retrouver la relation en dérivant $F(x(\theta)) = \theta M$.

9) a) f' prend une valeur positive sinon elle serait décroissante, ce qui contredirait $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

De même, f prend une valeur négative car $\lim_{-\infty} f = +\infty$. Par le TVI, f' s'annule.

b) Le graphe de f est au-dessus de sa tangente en x_0 , donc $f(x) \geq f(x_0)$, d'où le résultat.

c) - Montrons que Δ est convexe. Soient a et $b \in \Delta$. On a $f(a) = f(b) = f(x_0)$.

La corde de f sur $[a, b]$ est située au-dessus du graphe de f , donc $\forall x \in [a, b]$, $f(x) \leq f(x_0)$.

Mais par b), on a $f(x) \geq f(x_0)$. Donc $[a, b] \subset \Delta$.

- f est nécessairement continue, donc Δ est fermé (par passage à la limite des inégalités larges).

Par la divergence en l'infini, Δ est borné. Donc Δ est un intervalle non vide fermé borné, donc un segment.

10) Comme $f(x) \sim f'(0) x$, alors $f(x) > 0$ sur un voisinage $]0, \alpha]$ de 0 relativement à $[0, 1]$.

On considère alors $a = \inf A$, où $A = \{x \in [\alpha, 1] \mid f(x) = 0\}$ partie de $\mathbb{R}$ non vide et minorée.

Comme a est adhérent à A , alors $a \in [\alpha, 1]$ et est un zéro de f comme limite de zéros.

Ainsi, $f(a) = 0$. Par définition, on a $\forall x \in [\alpha, a[, f(x) \neq 0$.

Par a), on obtient donc $\forall x \in]0, a[, f(x) \neq 0$.

Par le TVI, f est de signe constant sur $]0, a[$. Donc, avec a), on obtient bien $\forall x \in]0, a[, f(x) > 0$.

11) a) On a $u_n \leq u_{pq} + u_r \leq qu_p + u_r$, car $pq = p + p + \dots + p$ (q fois).

Donc $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{u_r}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{M_p}{n}$, où $M_p = \max(u_0, \dots, u_{p-1})$.

b) L existe car $\left\{ \frac{u_n}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ est non vide et minorée par 0. Par définition de L , on a $\frac{u_n}{n} \geq L$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe p tel que $\frac{u_p}{p} \leq L + \varepsilon$. Donc $\frac{u_n}{n} \leq \frac{u_p}{p} + \frac{M_p}{n} \leq L + 2\varepsilon$ pour n assez grand.

On obtient bien $L \leq \frac{u_n}{n} \leq L + 2\varepsilon$ pour n assez grand. Comme ε est arbitraire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = L$.

12) a) $\left| \int_a^b f(t) dt - (b-a)f(b) \right| = \left| \int_a^b f(t) - f(b) dt \right| \leq \int_a^b |f(t) - f(b)| dt$.

Par l'IAF, $|f(t) - f(b)| \leq |t - b| M$. Donc $\int_a^b |f(t) - f(b)| dt \leq \int_a^b |t - b| M = \int_a^b (b-t) M dt$.

On conclut en utilisant $\int_a^b (b-t) dt = \int_0^{b-a} u du = \frac{1}{2}(b-a)^2$.

b) $\sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 = \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) \Delta = \Delta \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = \Delta$.

Il y a égalité ssi $\forall k, (x_k - x_{k-1}) = \Delta$, c'est-à-dire ssi σ est la subdivision régulière, et dans ce cas, $\Delta = \frac{1}{n}$.

c) Par Chasles, $\int_0^1 f(t) dt - S = \sum_{k=1}^n \left(\int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - (x_k - x_{k-1})f(x_k) \right)$.

Par a), $\left| \int_{x_{k-1}}^{x_k} f(t) dt - (x_k - x_{k-1})f(x_k) \right| \leq \frac{1}{2}(x_k - x_{k-1})^2 M$.

Donc par b), $\left| \int_0^1 f(t) dt - S \right| \leq \frac{1}{2} M \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1})^2 \leq \frac{1}{2} M \Delta$.

Remarque : Ainsi, S converge vers $\int_a^b f$ lorsque $\Delta \rightarrow 0$. En réalité, cette propriété est vraie pour toute fonction continue par morceaux (mais la majoration précédente ne s'applique plus, bien sûr).