Interrogation n°2. *Barème sur 24 pts*

1) *Les questions suivantes sont indépendantes*

a) [1 pt] Soient des réels x et y tels que $\forall \varepsilon > 0,\ x \leq y + \varepsilon$. Montrer que $x \leq y$.

b) [1 pt] Soit A une partie dense dans $\mathbb{R}$. Montrer que A rencontre tout intervalle d'intérieur non vide, c'est-à-dire que pour tous réels $\alpha < \beta$, il existe $a \in A$ tel que $\alpha < a < \beta$.

c) [1.5 pt] Soient x, y, p, q des réels strictement positifs. On suppose $\boxed{\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1}$. Montrer $xy \leq \dfrac{x^p}{p} + \dfrac{y^q}{q}$.

d) [1.5 pt] Soient un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un réel $x \in [0, n[$. Démontrer les inégalités :

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \leq e^x \leq \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{-n}$$

e) [2 pts] Soit $z = \exp(i\theta)$ un nombre complexe de module 1.

Expliciter *sans justification* une suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de nombres complexes telle que $\begin{cases} \lim_{n\to+\infty} z_n = z \\ \forall n \in \mathbb{N}^*,\ z_n \in U_n \end{cases}$

Rappel : U_n désigne l'ensemble des racines n-ième de l'unité dans $\mathbb{C}$.

2) Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive, avec $a < b$. On pose $M = \sup f$.

On pose $I_n = \left(\int_a^b f(t)^n \, dt\right)^{1/n}$. On se propose de prouver que $\lim_{n\to+\infty} I_n = M$.

a) [1 pt] Soit $0 < \varepsilon \leq M$.

Montrer qu'il existe un intervalle J de longueur $\beta > 0$ tel que $\forall x \in J,\ f(x) \geq M - \varepsilon$.

On en déduit aisément (*admis ici*) les inégalités : $\beta^{1/n}\,(M - \varepsilon) \leq I_n \leq (b - a)^{1/n}\, M$.

b) [1.5 pt] Montrer que $\lim_{n\to+\infty} I_n = M$.

3) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. *Les deux questions sont indépendantes.*

a) [1 pt] On suppose f de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = 0$.

Montrer qu'il existe un réel positif M tel que $\forall x \in [0, 1],\ |f(x)| \leq Mx^2$.

b) [2 pts] On suppose f de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$.

Montrer qu'il existe un réel positif M tel que $\forall x \in [0, 1],\ |f(x)| \leq Mx(1 - x)$.

Indication : Considérer une fonction auxiliaire continue sur $[0, 1]$.

4) [2 pts] Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles telles que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\boxed{b_n \geq 0}$.

On pose $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$ et $B_n = \sum_{k=0}^n b_k$. On suppose de plus $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n = +\infty$, c'est-à-dire $\boxed{\lim_{n\to+\infty} B_n = +\infty}$.

On suppose $a_n = \mathfrak{o}_{+\infty}(b_n)$. En utilisant une preuve de type Cesàro, montrer que $A_n = \mathfrak{o}_{+\infty}(B_n)$.

Indication : Sommer, à ε fixé, des inégalités de la forme $|a_n| \leq \varepsilon b_n$.

5) [1.5 pt] Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^1 et convexe.

Soit $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. Montrer que $f\left(\int_0^1 \varphi(t)\ dt\right) \leq \int_0^1 f(\varphi(t))\ dt$.

Remarque : On pourra utiliser sans justification toutes les inégalités de convexité vues en cours.

6) a) [1.5 pt] Soit A une partie de $[0,1]$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

(i) $0 \in A$

(ii) A est fermée, c'est-à-dire $\overline{A} = A$

(iii) Pour tout réel $x \in A$ vérifiant $0 \leq x < 1$, il existe $\alpha > 0$ tel que $[x, x+\alpha] \subset A$.

Montrer que $1 \in A$.

b) [2 pts] (*inspiré Oral X 2024*)

Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une application continue. On suppose aussi f dérivable à droite sur $[0,1[$ telle que

$$\forall x \in [0,1[, \quad f'_d(x) \geq 0 \quad , \quad \text{c'est-à-dire } \lim_{y \to x, y > x} \frac{f(y)-f(x)}{y-x} \geq 0$$

Soit $\varepsilon > 0$. On pose $A = \{x \in [0,1],\ f(x) - f(0) \geq -\varepsilon x\}$.

Montrer que A vérifie les trois propriétés du a). En déduire que $f(1) \geq f(0)$.

7) [1.5 pt] Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ convexe. On considère un segment $[\alpha, \beta]$ tels que $a < \alpha < \beta < b$.

En utilisant l'inégalité des pentes, montrer que f est lipschitzienne sur $[\alpha, \beta]$.

Remarque : On pose pour tous $a \leq x < y \leq b$, $\Delta(x,y) = \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$.

8) [1 pt] Montrer que $\overline{\overline{A}} = \overline{A}$, c'est-à-dire $\overline{A}$ est une partie fermée.

Indication : Ne pas utiliser les suites, mais la définition avec ε de la notion de point adhérent.

9) [2 pts] a) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $\begin{cases} v_0 = 0 \ \text{ et } \ \lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty \\ \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} - v_n \leq \varepsilon \end{cases}$

Montrer que pour tout réel $x \geq 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $|x - v_n| \leq \varepsilon$.

b) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante telle que $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $\lim_{n\to+\infty}(u_{n+1} - u_n) = 0$.

On pose $A = \{u_n - u_m,\ (n,m) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrer que A est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : Considérer $v_n = u_n - u_q$ pour $n \geq q$.