

Interrogation n°1. Corrigé

1) On a $z^6 = -1 = e^{i\pi}$ ssi $z \in e^{i\pi/6} U_6$.

Donc les racines complexes de P sont $e^{i\pi/6}$, i , $e^{5i\pi/6}$ et leurs conjugués.

D'où $P(X) = (X^2 + 1)(X^2 - 2X \cos(\frac{\pi}{6}) + 1)(X^2 - 2X \cos(\frac{5\pi}{6}) + 1) = (X^2 + 1)(X^2 - \sqrt{3}X + 1)(X^2 + \sqrt{3}X + 1)$.

2) a) On étudie la fonction $P : x \mapsto 2x^3 + x - 1$.

On vérifie que P est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, et induit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

Donc P admet une unique racine réelle α . Comme $P(1) < 0$ et $\lim_{+\infty} = +\infty$, alors $\alpha > 1$.

b) Les racines de P sur $\mathbb{C}$ sont α , β et $\bar{\beta}$. Donc $\alpha\beta\bar{\beta} = \frac{4}{2} = 2$ et $\alpha + 2\operatorname{Re}\beta = 0$.

Comme $\alpha > 1$, alors $|\beta|^2 < 2$, d'où $|\beta| < \sqrt{2}$. D'autre part $|\beta| \geq |\operatorname{Re}\beta| = \frac{1}{2}|\alpha| > \frac{1}{2}$.

3) a) On a $P(X)^2 = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n} a_i a_j x^{i+j}$. Donc $c_k = \sum_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n, i+j=k} a_i a_j$.

Remarque :

Avec $j = k - i$, on a $0 \leq j \leq n$, c'est-à-dire $k - n \leq i \leq k$ ce qui s'ajoute à la condition $0 \leq i \leq n$.

On obtient donc bien la somme des $a_i a_{k-i}$ pour $\max(0, k - n) \leq i \leq \min(n, k)$.

D'où en fait $\forall k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$,
$$c_k = \sum_{i=\max(0, k-n)}^{\min(n, k)} a_i a_{k-i}.$$

b) On applique a) avec $P(X) = (1 + X)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} X^k$. On a $P(X)^2 = (1 + X)^{2n}$.

λ est le coefficient en X^k de $P(X)^2$, donc vaut $\binom{2n}{k}$.

Remarque : L'exemple le plus connu est $\binom{2n}{n} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2$.

4) La condition s'écrit $P(0) = L(0)$, $P(1) = L(1)$, $P'(0) = L'(0)$ et $P'(1) = L'(1)$.

Ce qui équivaut à $(X - 1)^2(X - 2)^2$ divise $P(X) - L(X)$.

Donc les polynômes cherchés sont (par degré) les $P(X) = X + \lambda(X - 1)^2(X - 2)^2$, où $\lambda \in \mathbb{R}$.

5) a) On a $B'(a_k) = \prod_{j \neq k} (a_k - a_j)$.

Rappel : On dérive un produit en sommant tous les termes obtenus en dérivant un seul facteur.

On pourrait aussi utiliser ici $B'(a_k) = \lim_{x \rightarrow a_k} \frac{B(x)}{(x - a_k)}$.

b) Donc $\frac{B(X)}{B'(a_k)(X - a_k)} = \prod_{j \neq k} \frac{X - a_j}{a_k - a_j} = L_k(X)$ polynôme de Lagrange.

On sait par le cours que $\forall P \in K_{n-1}[X]$, $P(X) = \sum_{k=1}^n P(a_k) L_k(X)$.

c) On prend $P = 1$ et on considère le coefficient en X^{n-1} du a). On obtient $0 = \sum_{k=1}^n \frac{1}{B'(a_k)}$.

6) a) Par d'Alembert-Gauss, P admet n racines sur $\mathbb{C}$ comptées avec multiplicité.

Par hypothèse, elles sont réelles. Donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.

b) Supposons P scindé sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $P = \prod_{k=1}^n (X - a_k)$, où les a_k sont réels.

Soit $z \in \mathbb{C}$. Alors $|P(z)| \geq \prod_{k=1}^n |z - a_k| \geq \prod_{k=1}^n |\operatorname{Im}(z - a_k)| = |\operatorname{Im} z|^n$.

Réciproquement, pour tous $z \in \mathbb{C}$, $|P(z)| \geq |\operatorname{Im} z|^n$. Donc P est scindé sur $\mathbb{R}$.

7) On veut que $Q(X) = P(X) - c$ soit scindé à racines simples, c'est-à-dire Q et Q' sans racines communes.

Or, $Q'(X) = P'(X)$. Donc Q est scindé à racines simples ssi les racines de P' ne sont pas racines de P .

Donc $c \in \mathbb{C}$ convient ssi $c \notin \Delta = \{P(z), z \text{ racine de } P'\}$. On exclut ainsi qu'un nombre fini de valeurs.

8) a) (*unicité*) P_n est déterminé par ses valeurs sur $[-1, 1]$ infini, donc est unique.

(*existence*) On a $\sin(nx) = \text{Im}((\cos x + i \sin x)^n) = \sum_{k \text{ impair}} (\cos x)^{n-k} (\sin x)^k i^{(k-1)/2}$.

Donc $\sin(nx) = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} (1 - \sin^2 x)^{m-j} (\sin x)^{2j+1} (-1)^j$.

D'où $P_n(X) = \sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} (X^2 - 1)^{m-j} X^{2j+1}$ convient. Il est de degré n , car $\sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j+1} = 2^{n-1} \neq 0$.

Remarque : Une autre méthode consiste à procéder par récurrence d'ordre 2, via la formule de trigo : $\sin((n+2)\theta) + \sin((n-2)\theta) = 2 \sin(n\theta) \cos(2\theta) = 2(1 - 2 \sin^2(\theta)) \sin(n\theta)$.

On obtient $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $P_{-1} = -X$, $P_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_{n+2} = 2(1 - 2X^2)P_n - P_{n-2}$.

b) Posons $\forall k \in \mathbb{Z}$, $x_k = \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Alors $P_n(x_k) = \sin(k\pi) = 0$.

$x_{-m}, \dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots, x_m$ sont deux à deux distincts.

Donc par degré, ce sont les seules racines de P_n et elles sont simples.

Donc $P_n(x) = \lambda X \prod_{k=1}^m (X - x_k) \prod_{k=1}^m (X + x_k) = \lambda X \prod_{k=1}^m (X^2 - x_k^2)$.

c) Il résulte de b) que $P_n(x)$ est de la forme $\mu X \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{X^2}{x_k^2}\right)$, où μ réel non nul.

On obtient ainsi $\sin(nx) = \mu(\sin x) \prod_{k=1}^m \left(1 - \frac{(\sin x)^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$.

En faisant tendre x vers 0^- , on a $nx \sim \mu x$, donc $\mu = n$.

9) a) On veut $z = (1 - \lambda)x + \lambda y$, c'est-à-dire $\lambda = \frac{z - x}{y - x}$.

b) On a par hypothèse $f((1 - \lambda)x + \lambda y) = (1 - \lambda)f(x) + \lambda f(y) = \frac{y - z}{y - x} f(x) + \frac{z - x}{y - x} f(y) = L(z)$.

L est affine (il s'agit d'ailleurs de la droite d'interpolation de f en x et y). Donc $f = L$ sur $[x, y]$.

c) On a donc f'' nulle sur l'intervalle $]x, y[$, et comme $]x, y[$ est arbitraire, $f'' = 0$, c'est-à-dire f est affine sur $\mathbb{R}$.

d) Soient des réels $x_1, \dots, x_n$ et des réels positifs $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ de somme 1.

On considère une v.a. X à valeurs dans $\{x_1, \dots, x_n\}$ telle que $P(X = x_i) = \alpha_i$.

Alors $g(E(X)) = E(g(X))$ s'écrit : $g(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i g(x_i)$. Par la question c), g est affine.

10) On a $\int_0^1 \rho_n(t) f(t) dt - f(0) = \int_0^1 \rho_n(t) g(t) dt$, où $g(t) = f(t) - f(0)$. Posons $M = \sup_{t \in [0, 1]} |g(t)|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall t \in (0, \alpha]$, $g(t) \leq \varepsilon$.

$\left| \int_0^1 \rho_n(t) g(t) dt \right| \leq \left| \int_0^\alpha \rho_n(t) g(t) dt \right| + \left| \int_\alpha^1 \rho_n(t) g(t) dt \right| \leq \varepsilon + M \int_\alpha^1 \rho_n(t) dt$.

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_\alpha^1 \rho_n(t) dt = 0$, alors $\left| \int_0^1 \rho_n(t) g(t) dt \right| \leq 2\varepsilon$ pour n assez grand. D'où le résultat.