Interrogation n°1. Corrigé

1) $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(k\theta) = \mathrm{Re}(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} e^{ik\theta}) = \mathrm{Re}((1+e^{i\theta})^n)$. Or $(1+e^{i\theta})^n = \left(2\cos(\theta/2)e^{i\theta/2}\right)^n = 2^n\cos^n(\theta/2)e^{in\theta}$.

On en déduit que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\cos(k\theta) = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\cos^n\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

2) On a $P(X) = \dfrac{X^8-1}{X^2-1}$ (somme géométrique de raison X^2).

Donc les racines de P sont $e^{i\pi/4}$, i, $e^{3i\pi/4}$ et leurs conjugués. De plus, P est unitaire.

Donc $P(X) = (X^2 - 2X\cos\frac{\pi}{4}+1)(X^2+1)(X^2+2X\cos\frac{3\pi}{4}+1) = (X^2-\sqrt{2}X+1)(X^2+1)(X^2+\sqrt{2}X+1)$.

3) a) $P(1) = P'(1) = P(0) = 0$ ssi 1 est racine au moins double et 0 est racine de P, donc ssi $(X-1)^2X$ divise P. Les solutions sont donc les $X(X-1)^2\,Q(X)$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

b) Il s'agit d'une **équation linéaire** $u(P) = (1,1,1)$, où $u(P) = (P(0), P(1), P'(1))$.

On cherche une solution particulière.

On peut noter que le polynôme $Q = 1$ vérifie $u(Q) = (1,1,0)$.

Par le principe de superposition, il suffit de trouver P tel que $u(P) = (0,0,1)$.

On cherche un polynôme sous la forme $\lambda X(X-1)$, car $P(0) = P(1) = 0$.

En fait, $\lambda = 1$ convient, car la dérivée de $X(X-1)$ vaut $2X-1$.

Donc les solutions sont exactement les $1 + X(X-1) + X(X-1)^2\,Q(X)$, où $Q \in \mathbb{R}[X]$.

4) a) On a $\binom{n}{k} = \dfrac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!}$.

Donc $\sum_{k=0}^p \binom{n}{k}u_k$ est un polynôme en n de degré $\leq p$. Donc $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^p \binom{n}{k}u_k = 0$.

b) Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq p$, $|u_n| \leq \varepsilon$.

On a $\forall n \geq p$, $|v_n| \leq R_n + \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=p+1}^n \binom{n}{k}\varepsilon$, où $R_n = \dfrac{1}{2^n}\left|\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}u_k\right|$.

Comme $\sum_{k=p+1}^n \binom{n}{k} \leq 2^n$, on obtient $\forall n \geq p$, $|v_n| \leq R_n + \varepsilon$.

Par a), $\lim_{n\to+\infty} R_n = 0$, donc pour n assez grand, $|v_n| \leq 2\varepsilon$. D'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c) On prend $u_n = (-1)^n$. On a $v_n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}(-1)^k = \dfrac{1}{2^n}(1-1)^n = 0$ pour $n \geq 1$.

La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, mais la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle (à partir du rang 1).

d) On a $u_n = L + u'_n$, avec $\lim_{n\to+\infty} u'_n = 0$.

On a alors $v_n = L + v'_n$, où $v'_n = \dfrac{1}{2^n}\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}u'_k$ et par b), $\lim_{n\to+\infty} v'_n = 0$. D'où $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

5) (*unicité*) Si P_n et Q_n conviennent, ils coïncident sur $[-2,2]$ infini, donc sont égaux.

(*existence*) On a $2\cos((n+1)\theta)) + 2\cos((n-1)\theta)) = (2\cos\theta)(2\cos(n\theta))$.

Il en résulte que la suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $Q_0 = 2$, $Q_1 = X$ et $Q_{n+1} = XQ_n - Q_{n-1}$ convient :

par récurrence d'ordre 2, P_n est à coefficients entiers, de degré n et unitaire pour tout $n \geq 1$.

b) On a $Q_n(2X) = 2T_n(X)$, c'est-à-dire $Q_n(X) = 2T_n(\frac{1}{2}X)$.

c) On a $\|Q_n\| = 2$ et les $x_k = 2\cos(\frac{k\pi}{n})$, avec $0 \leq k \leq n$, conviennent : On a $Q_n(x_k) = 2\cos(k\pi) = 2(-1)^k$.

d) Supposons par l'absurde que $\|P\|_\infty < \|Q_n\|_\infty = 2$. On pose $R = Q_n - P$.

Comme Q_n et P sont unitaires de degré n, alors $\deg R < n$.

Or, on a $R(x_k) = Q_n(x_k) - P(x_k)$. Comme $|P(x_k)| < 2 = |Q_n(x_k)|$, alors $R(x_k)$ et $Q_n(x_k)$ sont de même signe.

Donc le signe de $R(x_k)$ alterne selon la parité de k, donc R change au moins n fois de signe, donc admet (d'après le TVI) au moins n zéros $y_1, ..., y_n$ vérifiant $x_0 > y_1 > x_1 > y_2 > ... > y_n > x_n$.

Comme $\deg R < n$, alors R est nul, c'est-à-dire $P = Q_n$, ce qui contredit l'hypothèse.

6) a) *Remarque* : Il s'agit de la décomposition de $R \in \mathbb{R}_n[X]$ dans la base de Lagrange $(L_0, L_1, ..., L_n)$.

Les polynômes $R(X)$ et $\sum_{k=1}^{n} R(x_k)L_k(X)$ prenant la même valeur $R(x_k)$ en tout x_k, avec $0 \leq k \leq n$.

Or, ils sont de degré $\leq n$, donc ils sont égaux (leur différence admet au moins $(n+1)$ racines).

b) On considère le coefficient en X^n dans la relation précédente. On obtient donc

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{R(x_k)}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k}(x_k - x_j)}$$

c) On a donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|P(x_k)| \leq \|P\|_\infty = \|Q_n\|_\infty = |Q_n(x_k)|$.

Avec $R = Q_n - P$. On a donc $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $|R(x_k)| \geq 0$.

Soit $k \in [\![0, n]\!]$. On a $\forall j \in [\![0, n]\!]$, $(x_k - x_j) > 0$ si $j > k$ et $(x_k - x_j) < 0$ si $j < k$.

Donc $\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k}(x_k - x_j)$ est du signe de $(-1)^k$, car il y a k entiers j vérifiant $0 \leq j < k$.

Donc les $\dfrac{R(x_k)}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k}(x_k - x_j)}$ sont positifs.

Comme leur somme est nulle, ils sont tous nuls. Par a), R est donc le polynôme nul.

Remarque culturelle : Ainsi, Q_n est l'unique polynôme unitaire de degré n minimisant $\| \ \|_\infty$.

7) a) $\dfrac{n!}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k}(k - j)} = \dfrac{n!}{(-1)^{n-k}\ k!(n-k)!} = (-1)^{n-k}\ \binom{n}{k} \in \mathbb{Z}$.

b) Par 6) a), on a $P(X) = \sum_{k=0}^{n} P(k)\ \prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k} \left(\dfrac{X - j}{k - j}\right)$ par interpolation en les points $(k, P(k))_{0 \leq k \leq n}$.

Comme $P(k) \in \mathbb{Z}$ et $\dfrac{n!}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k}(k - j)} \in \mathbb{Z}$, alors P est à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

8) a) Par Taylor, $R(X) = P(X+1)$, donc le résultat est immédiat par translation.

b) On note que par télescopages, $Q(X) - Q'(X) = P(X)$. Ainsi, $f'(x) = -P(x)e^{-x}$.

Ainsi, la fonction f est décroissante. Comme elle converge en $+\infty$ vers 0, elle est positive. Donc Q aussi.

Autre méthode : $\deg Q = \deg P$ est nécessairement pair (car P positif).

On montre que Q atteint nécessairement sa borne inférieure en un réel c.

On a $Q'(c) = 0$, et comme $Q - Q' = P$, alors $Q(c) = P(c) \geq 0$, donc Q est positive.

9) La fonction réciproque de l'homothétie $h(x) = 2x - 1$ est $h^{-1}(x) = \dfrac{x+1}{2}$.

On a donc aussi $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = f\left(\dfrac{x+1}{2}\right)$.

On considère la suite définie par $u_0 = x$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 1}{2}$. Ainsi, $f(u_{n+1}) = f(u_n)$.

On a donc $f(x) = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Mais on a $\lim_{n \to +\infty} u_n = 1$ (point fixe : en effet, $u_{n+1} - 1 = \dfrac{1}{2}(u_n - 1)$).

Par continuité de f, on a donc $f(x) = \lim_{n \to +\infty} f(u_n) = f(1)$. Donc f est constante.