Interrogation n°1. *Barème sur 23.5 pts*

1) [1 pt] Soient $n \in \mathbb{N}$ et $\theta \in \mathbb{R}$. On pose $S(\theta) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(k\theta)$. Montrer que $S(\theta) = 2^n \cos\left(\frac{n\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^n$.

2) [2 pts] On considère le polynôme réel $P(X) = 1 + X^2 + X^4 + X^6$.

Donner, *sans tout détailler*, la décomposition de $P(X)$ en facteurs irréductibles $\boxed{\text{dans } \mathbb{R}[X]}$.

3) a) [0.5 pt] Expliciter *sans justification* **tous** les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(0) = P(1) = P'(1) = 0$$

b) [2 pts] Déterminer **tous** les polynômes de $\mathbb{R}[X]$ tels que

$$P(0) = P(1) = P'(1) = 1$$

Suggestion : Pour se ramener à une situation plus simple, on pourra faire intervenir le polynôme $Q(X) = 1$.

4) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On pose

$$v_n = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u_k$$

a) [1.5 pt] Justifier que pour tout $p \in \mathbb{N}$ fixé, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{p} \binom{n}{k} u_k = 0$.

Suggestion : Traiter d'abord le cas $p = 2$ permet de saisir la nature des objets considérés.

b) [2 pts] On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$. Montrer avec soin que $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

c) [1 pt] Prouver à l'aide d'un exemple que la réciproque de b) est fausse.

d) [0.5 pt] On suppose $\lim_{n\to+\infty} u_n = L \in \mathbb{R}$. Montrer brièvement que $\lim_{n\to+\infty} v_n = L$.

5) Pour tout polynôme réel P, on définit $\boxed{\|P\|_\infty = \sup_{x\in[-2,2]} |P(x)|}$.

a) [2.5 pts] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique polynôme Q_n **unitaire à coefficients dans** $\mathbb{Z}$ vérifiant

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad Q_n(2\cos\theta) = 2\cos(n\theta)$$

Indication : Pour l'existence, définir une suite $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une récurrence d'ordre 2, avec $Q_0 = 2$.

b) [1 pt] Exprimer sans justification Q_n en fonction du polynôme de Tchebychev T_n.

c) [1 pt] Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner *sans justification* la valeur de $\|Q_n\|_\infty$, et expliciter $(n+1)$ réels x_k tels que

$$-2 \leq x_n < ... < x_0 \leq 2 \quad \text{ et } \quad \forall k \in [\![0, n]\!], \quad Q_n(x_k) = (-1)^k \|Q_n\|_\infty$$

d) [1.5 pt] Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et P un polynôme unitaire de degré n. Montrer que $\|P\|_\infty \geq \|Q_n\|_\infty$.

Indication : Raisonner par l'absurde et considérer les $(Q_n - P)(x_k)$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient $(n+1)$ réels distincts vérifiant $x_n < x_{n-1} < ... < x_0$.

Pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n$, on pose $L_k(X) = \prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k} \dfrac{X - x_j}{x_k - x_j} \in \mathbb{R}_n[X]$.

a) [1 pt] Montrer que pour tout polynôme R de degré $\leq n$, on a : $R(X) = \sum_{k=0}^{n} R(x_k) L_k(X)$.

b) [1 pt] En déduire que pour tout polynôme R de degré $\leq n-1$,

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{R(x_k)}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k} (x_k - x_j)} = 0$$

c) *Question supplémentaire hors-interrogation*

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On reprend les notations de l'exercice 5). Soit P polynôme unitaire et de degré n.

On sait que $\|P\|_\infty \geq \|Q_n\|_\infty$. On suppose $\|P\|_\infty = \|Q_n\|_\infty$.

En posant $R = Q_n - P$, montrer que $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $(-1)^k R(x_k) \geq 0$. En déduire $R = 0$.

7) [2 pts] a) Soient des entiers $0 \leq k \leq n$. Montrer que $\dfrac{n!}{\prod_{0 \leq j \leq n,\ j \neq k} (k - j)} \in \mathbb{Z}$.

b) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul de degré n tel que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

On pose $Q(X) = n!\ P(X)$. Montrer que tous les coefficients du polynôme $Q(X)$ appartiennent à $\mathbb{Z}$.

8) Soit P un polynôme réel de degré $n \in \mathbb{N}$ et positif sur $\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geq 0$.

Les deux questions sont indépendantes.

a) [1 pt] Montrer que $R(X) = P(X) + P'(X) + \dfrac{P''(X)}{2} + \ ...\ + \dfrac{P^{(n)}(X)}{n!}$ est positif sur $\mathbb{R}$.

b) [1 pt] ($\bigstar$) Montrer que $Q(X) = P(X) + P'(X) + \ ...\ + P^{(n)}(X)$ est positif sur $\mathbb{R}$.

Suggestion : Une des preuves consiste à utiliser la fonction $f(x) = e^{-x} Q(x)$.

9) [1 pt] ($\bigstar$) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(2x - 1)$.

Montrer que f est constante.