Interrogation n°0. Corrigé

1) Les diviseurs de 2^n sont les 2^j, avec $0 \le j \le n$. Donc $A = n+1$.

Les diviseurs de $12^n = 2^{2n}3^n$ sont les $2^j 3^k$, avec $0 \le j \le 2n$ et $0 \le k \le n$. Comme il y a **unicité** de la décomposition en facteurs premiers, M est le nombre de couples (j,k), donc $B = (2n+1)(n+1)$.

2) a) Il y a $\binom{n+1}{2}$ couples (i,j) tels que $i < j$: on choisit la partie $\{i,j\}$ de $[\![0,n]\!]$.

Remarque : Pour j fixé, il y a j valeurs de i possibles. On peut aussi calculer N en utilisant $\sum_{i=0}^n j = \frac{1}{2}n(n+1)$.

b) $S = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^{j-1} \binom{j}{i} = \sum_{j=0}^n (2^j - 1) = \sum_{j=0}^n 2^j - (n+1)$.

Comme $\sum_{j=0}^n 2^j = (2^{n+1}-1)$, obtient finalement $S = 2^{n+1} - n - 2$.

3) a) On applique le théorème de d'Alembert-Gauss à $Q(x) = P(x) - c$.

Le polynôme Q n'est pas constant donc admet au moins une racine.

b) Il y a n racines sur $\mathbb{C}$, ssi elles sont simples, donc ssi Q et Q' n'ont pas de racines communes.

Or, $Q' = P'$.

Donc Q est scindé à racines simples ssi $c \notin \{P(z_1), ..., P(z_{n-1})\}$, où les z_k sont les racines de P'.

On conclut en notant que $\mathbb{C} \setminus \{P(z_1), ..., P(z_{n-1})\}$ est infini.

4) Supposons $|a| \le 1$. Soit $|z| \le 1$. Alors $|az| \le 1$, d'où a fortiori $-1 \le \mathrm{Re}(az) \le 1$, donc $\mathrm{Re}(1-az) \ge 0$.

Réciproquement, supposons $|a| > 1$. On prend $z = \dfrac{\overline{a}}{|a|}$. Alors $az = |a|$ donc $\mathrm{Re}(1-az) < 0$.

D'où l'implication réciproque par contraposition.

Remarque : Cette propriété se généralise dans tout espace euclidien E :

La relation $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z| \le 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{Re}(1-az) \ge 0$ équivaut à $\forall z \in \mathbb{C},\ \ |z| \le 1 \ \Rightarrow\ \mathrm{Re}(a\overline{z}) \le 1$.

Elle se généralise donc par : $\forall x \in E,\ \ \|x\| \le 1 \ \Rightarrow\ \langle a, x\rangle \le 1$.

Avec Cauchy-Schwarz, on montre aisément $\|a\| = \sup_{\|x\| \le 1}\ \langle a, x\rangle$, et le sup est atteint lorsque $x = \dfrac{a}{\|a\|}$.

5) a) Soit $z \in A$. Alors z, z^2, z^4, z^8, ... appartiennent à A.

Comme A est fini, par le principe des tiroirs, il existe $i < j$ tels que $z^{(2^i)} = z^{(2^j)}$.

Donc $z = 0$ ou $z^m = 1$ avec $m = 2^j - 2^i \in \mathbb{N}^*$. Donc a fortiori $z = 0$ ou $|z| = 1$.

Autre preuve : Supposons $z \neq 0$ et $|z| \neq 1$. Alors les $z^{(2^i)}$ sont distincts, ce qui contredit A fini.

b) Une CNS est : n impair. Si n est pair, $f(-1) = f(1) = 1$, donc f n'est pas bijective.

Si n est impair, on peut montrer que f est injective (par Gauss) ou surjective (par Bezout) :

En effet, pour tout k, il existe (a,b) tels que $2a + bn = k$, d'où $f(\omega^a) = \omega^{2a} = \omega^k$, avec $\omega = e^{2\iota\pi/n}$.

6) a) Soit $n \ge 2$. $\mathcal{E}_n$ est la réunion disjointe :

- de l'ensemble $\mathcal{E}_n^-$ des parties $A \in \mathcal{E}_n$ qui ne contiennent pas n : on a $\mathcal{E}_n' = \mathcal{E}_{n-1}$
- de l'ensemble $\mathcal{E}_n^+$ des parties $A \in \mathcal{E}_n$ qui contiennent n (et donc ne contiennent pas $n-1$) :

On a $\mathrm{card}\, \mathcal{E}_n'' = \mathrm{card}\, \mathcal{E}_{n-2}$, car l'application $A \longmapsto A \setminus \{n\}$ est une bijection de $\mathcal{E}_n''$ sur $\mathcal{E}_{n-2}$.

Donc $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

b) On reconnaît une suite de Fibonacci.

Il exise donc $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = \alpha\varphi^n + b\psi^n$, où $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ et $\psi = \frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et $|\psi| < 1$, alors on a nécessairement $\alpha \neq 0$.

Donc $a_n \sim \alpha\varphi^n$, et ainsi $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \varphi \simeq 1.61$

Autre argument : si on admet l'existence de L, on a $L = 1 + \dfrac{1}{L}$ en utilisant $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1 + \dfrac{a_{n-2}}{a_{n-1}}$.

7) a) Si $n = 2a + 3b$, alors $n + 2 = 2(a+1) + 3b$.

Ainsi, si la propriété est vraie pour $n = 2$, elle est vraie pour $n + 2$.

Or, la propriété est vraie pour 2 et 3. Par récurrence d'ordre 2, elle est donc vraie pour tout $n \geq 2$.

b) Pour $n \geq 5$ et $(a, b) \in A_n$, on a nécessairement $a \geq 1$ ou $b \geq 1$.

Donc $A_n = A_n^{(1,0)} \cup A_n^{(0,1)}$, où $A_n^{(1,0)} = \{(a, b) \in A_n \mid a \geq 1\}$ et $A_n^{(0,1)} = \{(a, b) \in A_n \mid a \geq 1\}$.

On a $(a, b) \in A_n^{(1,0)}$ ssi $(a - 1, b) \in A_{n-2}$. On obtient donc une bijection entre $A_n^{(1,0)}$ et A_{n-2}.

De même, $A_n^{(0,1)}$ est en bijection avec A_{n-3}.

De plus $A_n^{(1,0)} \cap A_n^{(0,1)} = A_n^{(1,1)} = \{(a, b) \in A_n \mid a \geq 1 \text{ et } b \geq 1\}$, qui est en bijection avec A_{n-5}.

Donc $c_n = \text{card}(A_n^{(1,0)}) + \text{card}(A_n^{(0,1)}) - \text{card}(A_n^{(1,0)} \cap A_n^{(0,1)}) = c_{n-2} + c_{n-3} - c_{n-5}$.

8) a) On a $\dfrac{1}{e^{ix}} + \dfrac{1}{e^{iy}} + \dfrac{1}{e^{iz}} = \overline{(e^{ix} + e^{iy} + e^{iz})} = 0$.

b) Posons $P(X) = (X - e^{ix})(X - e^{iy})(X - e^{iz}) = X^3 - aX^2 + bX - c$.

On a $a = e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$. D'autre part, $b = e^{ix}e^{iy} + e^{ix}e^{iz} + e^{iy}e^{iz} = 0$ par a).

Comme $c = e^{i\varphi}$ avec $\varphi = x + y + z$, alors on a bien $P(X) = X^3 - e^{i\varphi}$.

Remarque : D'où on déduit que e^{ix}, e^{iy} et e^{iz} forment les sommets d'un triangle équilatéral.

9) a) Un *doublet de paires* (i, j, k, l) est entièrement défini par le couple $(\{a, b\}, A)$, où a et b sont les valeurs des deux paires, avec $a < b$, et où A est la paire des deux éléments de $\{i, j, k, l\}$ valant a.

Donc $M = \binom{n}{2} \times \binom{4}{2} = 6\binom{n}{2} = 3n(n-1)$.

b) $E(X_i X_j X_k X_l) = 1$ dans les deux cas suivants : $\left\{ \begin{array}{l} \text{- les quatre entiers sont égaux } (*) \\ \text{- } (i,j,k,l) \text{ est un doublet de paires } (**) \end{array} \right.$

Et $E(X_i X_j X_k X_l) = 0$ sinon (en effet, l'un des termes apparaît alors une seule fois ;

si par exemple $i \notin \{j, k, l\}$, on a $E(X_i X_j X_k X_l) = E(X_i)E(X_j X_k X_l) = 0$).

c) On a $S^4 = \left(\sum_{i=1}^n X_i\right)^4 = \sum_{i,j,k,l} X_i X_j X_k X_l$.

Donc $E(S^4)$ est le nombre de quadruplets (i, j, k, l) vérifiant $(*)$ ou $(**)$.

Il y a n solutions pour $(*)$ et M pour $(**)$. Donc $E(S^4) = n + M = n(3n - 2)$.

d) Comme les X_k sont indépendants, la loi de S ne dépend que de celle des X_k. Or, X_k et $-X_k$ ont même loi. Donc S et $-S$ ont même loi, donc $E(S^3) = E((-S)^3)$, d'où $E(S^3) = 0$.

Remarque : On pourrait aussi prouver la propriété en montrant que $E(X_i X_j X_k) = 0$ pour tout (i, j, k).

Remarque : Plus généralement, par le même argument, on a $E(S^p) = 0$ pour tout entier p impair.

10) a) Posons $Q = \displaystyle\prod_{k=0}^{n-1}(X - e^{2ik\pi/n})$. On a $Q = \dfrac{X^n - 1}{X - 1} = 1 + X + X^2 + ... + X^{n-1}$.

Or $\rho = |Q(1)|$, donc $\rho = n$.

b) En notant N le produit des $A_j A_k$ avec $\boxed{j \neq k}$, on a $N = M^2$. Il suffit donc de calculer N.

Considérons, pour $0 \leq k \leq n - 1$, $f(A_k) = \displaystyle\prod_{j \neq k} A_k A_j$. On a ainsi $N = f(A_0)f(A_1)...f(A_{n-1})$.

Mais, par isométrie, tous les $f(A_k)$ sont égaux, donc $N = f(A_0)f(A_1)...f(A_{n-1}) = f(A_0)^n$.

De plus, par rotation et renumérotation, on se ramène au cas où A_k est le point d'affixe $e^{2ik\pi/n}$.

Par a), on a alors $f(A_0) = \rho$. D'où on déduit $N = n^n$, c'est-à-dire $M = n^{n/2}$.