

Interrogation n°0. Corrigé

1) Supposons par l'absurde que x est rationnel, c'est-à-dire de la forme $x = \frac{p}{q}$, avec p et $q \in \mathbb{N}^*$, car $x > 0$.

On a alors $q \ln 3 = p \ln 2$, d'où $3^q = 2^p$.

Comme p est non nul, 2^p est un entier pair, d'où une contradiction, car 3^q est un entier impair

(Variante : par unicité de la décomposition en facteurs premiers, on obtient une contradiction).

2) a) On a $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i} \geq 2^{m_1+m_2+\dots+m_r}$, donc $m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq \log n$.

Donc a fortiori, $m_i \leq \lfloor \log n \rfloor$, puisque que les m_i sont positifs et entiers.

2) a) On a $n = \prod_{i=1}^r p_i^{m_i} \geq 2^{m_1+m_2+\dots+m_r}$, donc $m_1 + m_2 + \dots + m_r \leq \log n$.

Donc a fortiori, $m_i \leq \lfloor \log n \rfloor$, puisque que les m_i sont positifs et entiers.

b) Par a), on a nécessairement $0 \leq m_i \leq \lfloor \log N \rfloor$. Il y a donc au plus $(1 + \lfloor \log N \rfloor)$ choix pour m_i .

Donc $D_N \leq (1 + \lfloor \log N \rfloor)^r \leq (1 + \log N)^r$.

c) Supposons par l'absurde que l'ensemble des nombres premiers est fini, qu'on note $\{p_1, p_2, \dots, p_r\}$.

Par croissances comparées de N et de $(\log N)^r$, on a $N > (1 + \log N)^r$ pour N assez grand.

Donc $D_N < N$ pour N assez grand.

Or, on sait que tout entier est produit de nombres premiers, donc $D_N = N$ pour tout N . D'où une contradiction.

3) Première preuve :

Il y a $\binom{2n}{p}$ tirages possibles. Pour construire un tirage sans paire, on choisit p paires parmi les n , puis une chaussette dans chaque paire sélectionnée, donc $2^p \binom{n}{p}$. Donc $q = \frac{2^p \binom{n}{p}}{\binom{2n}{p}}$.

Seconde preuve :

On considère qu'on choisit les p chaussettes une par une et sans remise. Une fois choisie k chaussettes non appariées, la probabilité de tirer une nouvelle chaussette non appariée vaut $\frac{2n-2k}{2n-k}$.

On en déduit $q = 1 \times \frac{2n-2}{2n-1} \times \frac{2n-4}{2n-2} \times \dots \times \frac{2n-2(p-1)}{2n-(p-1)}$.

Autrement dit, en termes de p -uplets choisis, on a $q = \frac{2n \times (2n-2) \times \dots \times (2n-2(p-1))}{2n \times (2n-1) \times \dots \times (2n-(p-1))}$.

4) Pour construire $(x_1, \dots, x_{p+1})$, on choisit $x_{p+1} = k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, et on est ramené ensuite à trouver un p -uplet croissant dans $\llbracket 1, k \rrbracket$. On en déduit $a_{p+1,n} = \sum_{k=1}^n a_{p,k}$.

Remarque culturelle : On sait par ailleurs par le cours que $a_{p,n} = \binom{n+p-1}{p}$.

On retrouve la formule de la crosse de hockey : $\sum_{k=1}^n \binom{k+p-1}{p} = \binom{n+p}{p+1}$.

5) a) En associant à (a, b, c) l'ensemble $\{a, a+b+1\}$, on obtient une bijection de Δ sur l'ensemble des parties de cardinal 2 dans $\llbracket 0, n+1 \rrbracket$, donc $\text{card } \Delta = \binom{n+2}{2}$.

b) On développe en choisissant x, y ou z dans chaque facteur. On obtient des termes en $x^a y^b z^c$.

On a $\binom{n}{a}$ choix pour x , puis $\binom{n-a}{b}$ choix pour y ; et on choisit z dans les autres facteurs.

Donc $(x+y+z)^n = \sum_{(a,b,c) \in \Delta} \binom{n}{a} \binom{n-a}{b} x^a y^b z^c$, et $\binom{n}{a} \binom{n-a}{b} = \frac{n!}{a!(n-a)!} \frac{(n-a)!}{b!(n-a-b)!} = \frac{n!}{a!b!c!}$.

6) $\sin(nt) = \text{Im}(e^{int}) = \text{Im}((\cos t + i \sin t)^n) = \text{Im}(\sum_{k=0}^n i^k (\cos t)^{n-k} (\sin t)^k)$.

D'où $\sin(nt) = \sum_{k \text{ impair}} i^{k-1} (\cos t)^{n-k} (\sin t)^k = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^j (\cos t)^{2m-2j} (\sin t)^{2j+1}$.

Comme $(\cos t)^2 = 1 - (\sin t)^2$, alors $\sin(nt) = \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} (-1)^j (1 - (\sin t)^2) (\sin t)^{2j+1}$.

7) a) On a $(f+g)^{(n)} = f^{(n)} + g^{(n)} \geq 0$.

Par Leibniz, $(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)} \geq 0$ comme somme de fonctions positives.

b) On montre par récurrence forte sur n que $F^{(n)} \geq 0$. On a bien $F = \exp(f) \geq 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\forall k < n, f^{(k)} \geq 0$.

Comme $F' = f' F$, alors $F^{(n)} = (F')^{(n-1)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} F^{(k)} (f')^{(n-1-k)} = \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} F^{(k)} f^{(n-k)}$.

Par hypothèse de récurrence forte, les $F^{(k)}$ sont positifs pour $k \leq n-1$, donc $F^{(n)} \geq 0$.

8) a) $(A-B)(\sum_{k=0}^{n-1} A^k B^{n-1-k}) = \sum_{k=0}^{n-1} (A^{k+1} B^{n-1-k} - A^k B^{n-k}) = A^n - B^n$ par télescopes.

b) L'idée est de montrer que d'une façon plus générale, $P(X) - X$ divise $Q(P(X)) - Q(X)$.

On pose $Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. Ainsi, $Q(P(X)) - Q(X) = \sum_{k=0}^n a_k (P(X)^k - X^k)$.

Par a), $P(X) - X$ divise $P(X)^k - X^k$, donc par linéarité, $P(X) - X$ divise $Q(P(X)) - Q(X)$.

9) a) Le sens réciproque est évident car on sait que $\Delta \geq 0$ ssi il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) < 0$.

Supposons $\Delta \geq 0$.

Notons α et β les racines réelles de P . Il s'agit de prouver que $[\alpha, \beta]$ contient au moins un entier.

On a $\alpha = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}\Delta \leq \frac{1}{2}a \leq \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\Delta$. Si a est pair, alors $n = \frac{1}{2}a \in \mathbb{Z}$.

Sinon, a est impair, et on a nécessairement $\Delta \in \mathbb{N}^*$, donc $\Delta \geq 1$, d'où $\frac{1}{2}(a-1)$ convient.

b) Contre-exemple $P = x(x-1)$. On a bien $\Delta < 0$ mais $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \geq 0$.

10) a) Il y a un nombre fini de triplets entiers $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels que $a+b+c = 2020$, donc A est fini (et non vide), donc admet un maximum.

b) $(a+1)(b-1) = ab + (b-a-1) > ab$ lorsque $b-a \geq 2$.

c) Par a), il existe un triplet optimal $(a, b, c) \in (\mathbb{N}^*)^3$ tel que $M = abc$ et $a+b+c = 2020$.

Quitte à les permuter, on peut supposer $a \leq b \leq c$. On suppose par l'absurde $c-a \geq 2$. Par b), on vérifie que $(a+1)(c-1) > ac$, donc le triplet $(a+1, b, c-1)$ est "meilleur" que le triplet (a, b, c) , ce qui est absurde.

Ainsi, $c-a \leq 1$. Donc $2026 = a+b+c$ est compris entre $3a$ et $3a+2$. Donc $a = \lfloor \frac{2026}{3} \rfloor = 675$.

Et comme 2026 est congru à 1 modulo 3, on a $b = 675$ et $c = 676$. Donc $M = 675^2 \times 676$.

Remarque : Si a, b, c pouvaient prendre des valeurs réelles, la valeur maximale serait $\left(\frac{2026}{3}\right)^3$.

En effet, par l'inégalité arithmético-géométrique, pour tous réels $x, y, z > 0$, on a $xyz \leq \left(\frac{x+y+z}{3}\right)^3$ par concavité de $\ln$, et il y égalité lorsque x, y, z sont égaux. Donc la valeur maximale est atteinte pour $x = y = z$.