Interrogation n°0. *Barème sur 23.5 pts*

1) [1.5 pt] On se place dans l'ensemble $\mathbb{N}^*$ des entiers naturels non nuls. On rappelle que 1 divise tout entier.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner *sans justification* le nombre A de diviseurs de 2^n et le nombre B de diviseurs de 12^n.

2) On note Δ l'ensemble des couples d'entiers (i,j) vérifiant $\boxed{0 \leq i < j \leq n}$.

a) [0.5 pt] Donner *sans justification* $N = \operatorname{card} \Delta$.

b) [2 pts] Calculer $S = \sum_{(i,j)\in\Delta} \binom{j}{i}$.

Autrement dit, on veut calculer la somme des coefficients binomiaux $\binom{j}{i}$ lorsque (i,j) décrit Δ,

Attention à bien prendre en compte le fait que i est **strictement** inférieur à j.

3) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme **non constant** de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

a) [1 pt] Montrer que pour tout $c \in \mathbb{C}$, l'équation $P(z) = c$ admet au moins une solution.

b) [1.5 pt] Montrer qu'il existe une infinité de c pour lesquels l'équation $P(z) = c$ admet n solutions distinctes.

4) [2.5 pts] Soit $a \in \mathbb{C}$. Montrer : $|a| \leq 1$ ssi $\forall z \in \mathbb{C}, \ (\ |z| \leq 1 \ \Rightarrow \ \operatorname{Re}(1 - az) \geq 0 \ )$.

5) Soit A une partie **finie** de $\mathbb{C}$ telle que $\{z^2, \, z \in A\} = A$.

Autrement dit, l'application $f : A \to A \quad z \longmapsto z^2$ est une permutation.

a) [1.5 pt] Soit $z \in A$. Que peut-on dire de $|z|$?

b) [0.5 pt] (★) Donner *sans justification* une CNS sur $n \in \mathbb{N}^*$ pour que U_n vérifie la propriété.

6) On note $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des parties de $\{1, 2, ..., n\}$ ne contenant pas deux entiers consécutifs.

Par exemple, $\{1, 3, 5\}$ appartient à $\mathcal{E}_5$, et $\{1, 3, 4\}$ n'appartient pas à $\mathcal{E}_5$.

a) [1.5 pt] On note a_n le cardinal de $\mathcal{E}_n$. On a $a_0 = 1$ et $a_1 = 2$.

Soit $n \geq 2$. Démontrer que $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$.

b) [1 pt] (★) Donner *sans justification* la valeur de $L = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$.

7) a) [1 pt] Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 2$, il existe $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tel que $n = 2a + 3b$.

Indication : Utiliser une récurrence.

b) *Question supplémentaire hors-interrogation*

On note $A_n = \{(a,b) \in \mathbb{N}^2 \mid n = 2a + 3b\}$. On pose $c_n = \operatorname{card} A_n$.

Pour $n \geq 5$, donner une relation entre c_n , c_{n-2}, c_{n-3} et c_{n-5}.

8) Soient des réels x, y, z tels que $e^{ix} + e^{iy} + e^{iz} = 0$.

a) [0.5 pt] Montrer que $\dfrac{1}{e^{ix}} + \dfrac{1}{e^{iy}} + \dfrac{1}{e^{iz}} = 0$.

b) [1 pt] En déduire qu'il existe $\varphi \in \mathbb{R}$ tels que e^{ix}, e^{iy} et e^{iz} sont les racines du polynôme $X^3 - e^{i\varphi}$.

9) Une variable aléatoire de Rademacher est une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{-1, 1\}$.

On a ainsi $E(X) = 0$ et $E(X^2) = 1$.

Soient n variables aléatoires de Rademacher mutuellement indépendantes X_1, X_2, ... X_n. On pose $\boxed{S = \sum_{k=1}^n X_k}$.

On rappelle que $\boxed{\text{si } Y \text{ et } Z \text{ sont des variables aléatoires indépendantes, on a } E(YZ) = E(Y)E(Z)}$.

a) [2 pts]

Une paire est un ensemble de cardinal 2. On dit qu'un quadruplet d'entiers (i, j, k, l) est un *doublet de paires* ssi il existe *deux* entiers distincts a et b tels que deux termes du quadruplet valent a et les deux restants valent b.

Par exemple, $(1, 4, 4, 1)$ et $(1, 2, 1, 2)$ sont des doublets de paires.

En revanche, $(1, 1, 1, 1)$ et $(1, 1, 4, 1)$ ne sont pas des doublets de paires.

Déterminer le nombre M de *doublets de paires* $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$.

b) [1 pt] Pour $(i, j, k, l) \in [\![1, n]\!]^4$, donner *sans justification* la valeur de $E(X_i X_j X_k X_l)$.

Attention : Distinguer différents cas.

c) [1 pt] Calculer $E(S^4)$. On pourra faire intervenir l'entier M défini au a).

d) [1 pt] (★) Montrer sans calcul que $E(S^3) = 0$.

10) Soit un entier naturel non nul $n \in \mathbb{N}^*$.

a) [1 pt] On pose $\rho = \displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \left|1 - e^{2ik\pi/n}\right|$. En utilisant $X^n - 1$, montrer que ρ vaut n.

b) [1.5 pt] (★) On considère un polygone régulier à n côtés inscrit dans le cercle unité.

On note $A_0, ..., A_{n-1}$ ses sommets. Les cordes du polygone sont les distances entre deux sommets distincts.

Calculer le produit $M = \displaystyle\prod_{0 \leq j < k < n} A_j A_k$ des distances $A_j A_k$, où $0 \leq j < k \leq n - 1$.