Classe de PC*3 - été 2025 - exemples - corrigé

Combinatoire et probabilités

1) a) $N = n^p$: pour chaque tirage, il y a n possibilités : N est le nombre de p-uplets à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

b) $N = n(n-1)...(n-p+1)$: il y a n possibilités pour le premier tirage, $(n-1)$ possibilités pour le deuxième tirage, etc : N est le nombre de p-uplets injectifs à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

c) $N = \binom{n}{p}$: effectuer p tirages sans remise non ordonnés revient à choisir une partie de cardinal p.

d) $N = \binom{n+p-1}{p}$. Notons x_k le nombre de fois où la boule de numéro k est tirée ; une configuration est donc entièrement définie par le n-uplet d'entiers naturels $(x_1, ..., x_n)$ qui vérifie $x_1 + ... + x_n = p$.

On peut établir une bijection f entre l'ensemble E des n-uplets d'entiers $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{N}^n$ vérifiant $x_1 + ... + x_n = p$ et l'ensemble F des parties de cardinal $(n-1)$ dans $[\![1, p+n-1]\!]$.

On peut en effet considérer $f : E \to F$ $(x_1, ..., x_n) \longmapsto (x_1 + 1, x_1 + x_2 + 2, ..., x_1 + x_2 + ... + x_{n-1} + n - 1)$.

2) On note A_j l'événement : " Le numéro de la boule tirée au cours du j-ième tirage est $> k$ ".

On a $P(X > k) = P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap ... \cap A_m)$.

On a donc $P(X > k) = P(A_1)P(A_2 \mid A_1)P(A_2 \mid A_1 \cap A_2)...P(A_m \mid A_1 \cap A_2 ... \cap A_{m-1})$.

On en déduit que $P(X > k) = \left(1 - \dfrac{k}{n}\right)\left(1 - \dfrac{k}{n-1}\right)\left(1 - \dfrac{k}{n-2}\right)...\left(1 - \dfrac{k}{n-m+1}\right)$.

Une autre façon de calculer $P(X > k)$ est de considérer l'ensemble des m premiers tirages comme le choix d'une partie de cardinal k selon la loi uniforme dans l'ensemble des parties de cardinal m dans $[\![1,n]\!]$.

On a ainsi $P(X > k) = \dfrac{\binom{n-k}{m}}{\binom{n}{m}} = \dfrac{(n-k)...(n-m-k+1)}{n(n-1)...(n-m+1)}$.

3) On peut représenter la situation par un tableau $\begin{array}{c|c|c} & A & \overline{A} \\ \hline B & a & c \\ \hline \overline{B} & b & d \end{array}$, avec $a, b, c, d \in [0,1]$ et $a + b + c + d = 1$.

On cherche a, b, c, d tels que $\dfrac{a}{a+c} = 0.1$, $a + b = 0.1$ et $\dfrac{a}{a+b} = 0.5$

On a donc $c = 9a$, $a = b$ et $a + b = 0.1$. D'où on conclut $a = b = 0.05$, $c = 0.45$ et $d = 1 - a - b - c = 0.55$

Remarque : La formule de Bayes permet de calculer directement $P(B) = \dfrac{P(B \mid A)P(A)}{P(A \mid B)} = \dfrac{0.05}{0.1} = 0.5 = a + c$.

Remarque : On peut réaliser cette situation en prenant $\Omega = \{1,2,3,4\}$, $A = \{1,2\}$, $B = \{1,3\}$, et la loi de probabilité définie par $P(\{1\}) = a$, $P(\{2\}) = b$, $P(\{3\}) = c$ et $P(\{4\}) = d$.

4) a) On considère n variables de Bernoulli $X_1, ..., X_n$ indépendantes de sorte que $\forall k$, $P(X_k = 1) = a_k$.

On considère la variable $Y = (X_1, ..., Y_n)$ et la loi de probabilité induite par Y sur $\{0,1\}^n$.

Autrement dit, on prend $\Omega = \{0,1\}^n$, et $A_k = \{(x_1, ..., x_n) \in \Omega \mid x_k = 1\}$.

Les événements A_k sont indépendants et on a bien $P(A_k) = P(X_k = 1) = a_k$.

b) Comme les A_k sont indépendants, les $\overline{A_k}$ le sont aussi, donc $P(\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}) = \prod_{k=1}^n (1 - a_k)$.

Le complémentaire de $\overline{A_1} \cap \overline{A_2} \cap ... \cap \overline{A_n}$ dans Ω est $A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n$.

Donc $1 - \prod_{k=1}^n (1 - a_k) = P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k) = \sum_{k=1}^n a_k$.

Nombres complexes et polynômes

5) On remarque que si z est racine, alors z^2, donc aussi $z^4, z^8, ...$, sont racines. Comme P admet un nombre fini de racines, il existe donc par le principe des tiroirs deux entiers distincts $p > q$ tels que $z^{(2^p)} = z^{(2^q)}$.

Donc il existe $m = 2^p - 2^q \in \mathbb{N}^*$ tels que $z^m = 1$. Ainsi, les racines de P sont nécessairement des racines de l'unité.

Par ailleurs, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble U_m des racines m-ième de l'unité est stable par $z \longmapsto z^2$.

En effet, si $z^m = 1$, alors $(z^2)^m = (z^m)^2 = 1$.

Donc $P = X^n - 1$ convient.

6) Le polynôme $X^n - 1$ est scindé à racines simples (car il admet n racines distinctes).

Or, si $P(X) = \lambda(X - z_1)^{m_1}(X - z_2)^{m_2}...(X - z_r)^{m_r}$, alors $P(X)^2 = \lambda^2(X - z_1)^{2m_1}(X - z_2)^{2m_2}...(X - z_r)^{2m_r}$.

Donc un polynôme complexe est un carré de polynôme ssi toutes ses racines ont un ordre de multiplicité pair.

Donc il n'existe aucun polynôme P tel que $P^2 = X^n - 1$.

7) a) Il suffit de prendre P tel que $P' = \lambda X^{m-1}$, avec $m \geq 3$, donc par exemple $P = X^m - 1$.

b) Soit un polynôme réel P de degré n scindé à racines simples $x_1 < x_2 < ... < x_n$. Par le théorème de Rolle appliqué aux intervalles $[x_i, x_{i+1}]$, le polynôme P' admet des zéros $y_1, ..., y_{n-1}$ vérifiant $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < y_{n-1} < x_n$.

Comme $\deg P' = n - 1$, alors P' est scindé, et ses racines sont simples. Donc la réponse est négative.

8) a) Il s'agit de la formule de Taylor. L'unique polynôme solution (de degré $\leq n$) est $P(X) = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(X-a)^k}{k!}$.

b) Le polynôme $P_0(X) = X^n$ vérifie bien $\forall k \in \{1, 2, ...n\}$, $P_0(k) = k^n$.

Les polynômes $P(X)$ vérifiant $\forall k \in \{1, 2, ...n\}$, $P(k) = k^n$, sont éxatement les polynômes

$$P(X) = X^n + (X - 1)...(X - n)\ Q(X), \text{ où } Q(X) \text{ polynôme arbitraire}$$

En effet, P et P_0 prennent les mêmes valeurs en $k \in \{1, 2, ...n\}$ ssi $1, 2, ..., n$ sont racines de $P - P_0$, donc ssi $(X-1)...(X-n)$ divise $(P - P_0)$.

Comme on veut $\deg P < n$, on prend $Q(X) = -1$, c'est-à-dire

$$P(X) = X^n - (X - 1)...(X - n)$$

Algèbre linéaire et matrices

9) On a $\operatorname{Im} A = D$ ssi A n'est pas nulle et toutes les colonnes de A sont colinéaires à Ω.

Donc les solutions sont les $A = (\alpha_1\Omega, \alpha_2\Omega, ..., \alpha_n\Omega)$, avec $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \neq (0, 0, ..., 0)$.

On a $\operatorname{Ker} B = D$ ssi $D \subset \operatorname{Ker} B$ et $\dim \operatorname{Ker} B = 1$, donc ssi $B\Omega = 0$ et $\operatorname{rg} B = n - 1$.

On a $B\Omega = 0$ ssi la somme des colonnes de B est nulle.

Donc les solutions sont les matrices $B = (B_1, B_2, ..., B_{n-1}, -B_1 - B_2, ..., -B_{n-1})$, où la famille $(B_1, B_2, ..., B_{n-1})$ est libre (ce qui assure que la matrice B est de rang $n - 1$).

Par exemple, la matrice $\begin{pmatrix} 1 & & & & -1 \\ & 1 & & & -1 \\ & & \ddots & & \vdots \\ & & & 1 & -1 \\ 0 & & & 0 & 0 \end{pmatrix}$ convient.

10) Notons u : l'endomorphisme de $E = K^n$ canoniquement associé à A.

On a $A^2 = O_n$ ssi $u^2 = 0$, donc ssi $\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} u$. Par le théorème du rang, on a donc $r \leq n - r$, c'est-à-dire $r \leq \frac{1}{2}n$.

Comme on veut aussi $r = \frac{1}{2}n$, on a nécessairement $\operatorname{Im} u = \operatorname{Ker} u$.

On peut donc considérer $A = \left(\begin{array}{c|c} O & I_r \\ \hline O & O \end{array}\right)$: on a $\operatorname{Im} M = \operatorname{Ker} M = \operatorname{Vect}(E_1, E_2, ..., E_r)$, avec $n = 2r$.

Remarque : Plus généralement, on peut prendre $A = \left(\begin{array}{c|c} O & M \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec M inversible.

11) Sachant que les matrices canoniques E_{ij} vérifient $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, on a $E_{12}E_{11} = O$ et $E_{11}E_{12} = E_{12}$.

Ainsi, les matrices E_{12} et E_{11} conviennent.

On peut donc aussi prendre des matrices de la forme $A = \left(\begin{array}{c|c} O & M \\ \hline O & O \end{array}\right)$ et $B = \left(\begin{array}{c|c} N & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, avec $NM \neq O$.

Variante : Notons u et v les endomorphismes canoniquement associés à A et B.

La relation $AB = O_n$ équivaut à $u \circ v = 0$, c'est-à-dire $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

La relation $BA \neq O_n$ équivaut de même à $\operatorname{Im} u \not\subset \operatorname{Ker} v$.

Ainsi, si on prend $B = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, la matrice A est de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O & * \\ \hline O & * \end{array}\right)$, car $\operatorname{Im} v \subset \operatorname{Ker} u$.

On choisit alors A de sorte que $BA \neq O_n$, c'est-à-dire A de la forme $\left(\begin{array}{c|c} O & M \\ \hline O & * \end{array}\right)$ avec M non nulle.

12) *Première solution* : On pose $P = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et on résout le système linéaire $MP = PN$.

On obtient la CNS : $\begin{pmatrix} a\lambda + b\alpha & c\lambda + d\alpha \\ b\lambda & d\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a\lambda & a + c\lambda \\ b\lambda & b + d\lambda \end{pmatrix}$, c'est-à-dire $\begin{cases} b\alpha = 0 \\ d\alpha = a \end{cases}$ $\begin{cases} b = 0 \\ d\alpha = a \end{cases}$.

Comme on cherche une matrice inversible, les solutions sont les $P = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & a\alpha^{-1} \end{pmatrix}$, avec a non nul.

Seconde solution (meilleure) : Considérons u de $E = K^2$ l'endomorphisme associé à M.

Ainsi, on a $\operatorname{Mat}_{(e_1,e_2)} u = M$, où (e_1, e_2) est la base canonique de K^2. On a $\begin{cases} u(e_1) = \lambda e_1 \\ u(e_2) = \alpha e_1 + \lambda e_2 \end{cases}$

On cherche une base (e_1', e_2') telle que $\operatorname{Mat}_{(e_1',e_2')} u = N$, c'est-à-dire $\begin{cases} u(e_1') = \lambda e_1' \\ u(e_2') = e_1' + \lambda e_2' \end{cases}$

Il suffit donc de prendre $e_1' = e_1$ et $e_2' = \dfrac{1}{\alpha}e_2$. En effet, on a $u(e_2') = \dfrac{1}{\alpha}u(e_2) = e_1 + \dfrac{\lambda}{\alpha}e_2 = e_1 + \lambda e_2'$.

On en conclut que $P = \operatorname{Mat}_{(e_1,e_2)}(e_1', e_2') = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha^{-1} \end{pmatrix}$ convient (matrice de passage de (e_1, e_2) à (e_1', e_2')).

12) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ une base d'un K-ev E.

Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est entièrement défini par les $u(e_j)$, avec $1 \leq j \leq n$.

Pour avoir $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$, il suffit de prendre $u(e_1) = 0$ et $\forall j \geq 2$, $u(e_j) = e_{j-1}$.

Autrement dit, la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ & & 0 & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$ convient.

13) On cherche donc des matrices de projection dans $\mathbb{R}^2$.

On considère d'abord la matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, matrice de la projection sur $\mathbb{R}e_1$ parallèlement à $\mathbb{R}e_2$.

Toute matrice semblable à B convient. Ainsi, toute matrice $A = P^{-1}BP$ vérifie aussi $A^2 = A$.

En prenant par exemple $P = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, on a $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, et $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, avec α arbitraire.

14) Les matrices de rang 1 sont de la forme $A = (\alpha_1 X, ..., \alpha_n X)$, avec X non nul et $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \neq (0, ..., 0)$.

En effet, une matrice est de rang 1 ssi ses vecteurs colonnes appartiennent à une même droite vectorielle et ne sont pas identiquement nulles. Il suffit donc de choisir le vecteur X et les scalaires α_j tels que $\sum_{j=1}^n \alpha_j x_j = 0$.

Autrement dit, il suffit que les vecteurs X et $Z = (\alpha_1, ..., \alpha_n)$ soient non nuls et orthogonaux.
Par exemple, si on prend $X = (1, 1)$ et $Z = (1, -1)$, on obtient $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

b) Toute matrice de projection de rang r est semblable à la matrice $J_r = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$, où $r = \operatorname{rg} A$.

En effet, si $u \in \mathcal{L}(E)$ est une projection sur F parallèlement à G, J_r est la matrice de u dans une base de E adaptée à la somme directe $F \oplus G = E$. Pour une projection, on a donc toujours $r = \operatorname{rg} A = \operatorname{tr} A$.

Donc il n'existe pas de matrice de projection de rang 1 et de trace nulle.

Fonctions continues et fonctions dérivables

15) a) On peut prendre $f(t) = a + t(b - a)$ qui est l'unique application affine croissante vérifiant $f([0, 1]) = [a, b]$.

b) De nombreux exemples possibles : $f(t) = \tan\left(\frac{\pi}{2}t\right)$, $f(t) = \dfrac{t}{1-t} = \dfrac{1}{1-t} - 1$, $f(t) = -\ln(1 - t)$.

16) On considère $\forall x > 0$, $f(x) = \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Pour montrer qu'il n'existe pas limite en 0, il suffit d'exhiber deux suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeant vers 0^+ telles que $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) \neq \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$. On prend en effet $x_n = \frac{1}{2n\pi}$ et $y_n = \frac{1}{2n\pi+\pi/2}$. On a $f(x_n) = 0$ et $f(y_n) = 1$.

Or, si f admettait une limite L en 0, on aurait (par composition des limites) : $\lim_{n\to+\infty} f(x_n) = L = \lim_{n\to+\infty} f(y_n)$.

17) Supposons par l'absurde qu'il existe une surjection continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admettant un nombre fini de zéros.

En particulier, il existe $a > 0$ tel que $\forall x \geq a$, $f(x) \neq 0$.

Par le TVI (théorème des valeurs intermédiaires), la fonction f est de signe constant sur $[a, +\infty[$.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que f est strictement positive sur $[a, +\infty[$.

D'autre part, la fonction continue f est bornée sur le segment $[0, a]$.

On en déduit que f est minorée sur $[0, a]$ et sur $[a, +\infty[$, donc est minorée sur $[0, +\infty[$, ce qui contredit f surjective.

18) On prend par exemple $f(x) = x \sin\left(\dfrac{1}{\pi x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

La fonction est continue sur $]0, 1]$ comme composée de fonctions continues et en 0 car $|f(x)| \leq |x|$.

19) On peut considérer $f(x) = (1 + x)^m(1 - x)^m$ sur $[-1, 1]$ et $f(x) = 0$ sinon.

On choisit $m = n + 1$ afin que le raccordement en 0 soit de classe C^n : on a bien $\forall k \leq n$, $f^{(k)}(1) = f^{(k)}(-1) = 0$.

20) a) La fonction $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ convient.

En effet, lorsque u tend vers $+\infty$, $u^n = \mathfrak{o}_{+\infty}(e^{-u})$, donc en 0^+, on a $x^{-n} = \mathfrak{o}_{+\infty}(e^{-1/x})$, c'est-à-dire $e^{-1/x} = \mathfrak{o}\,(x^n)$ en 0.

b) *Remarque* : Une fonction polynomiale de la forme $f(x) = \lambda x^n$ ne peut convenir, car $f^{(n)}(0) = n!\lambda \neq 0$.

On considère $f(x) = \exp\left(-\frac{1}{x}\right)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$.

On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(x)$ est de la forme $\dfrac{P_n(x)}{x^{2n}} e^{-1/x}$, où P_n est un polynôme.

On en déduit avec a) que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0} f^{(n)}(x) = 0$.

Remarque : Avec le théorème du prolongement C^1, on en déduit que f est de classe C^∞.

Séries et intégrales

21) On rappelle que par définition, $\sum a_n$ converge ssi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

On souhaite que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit bornée et divergente. Il suffit donc de prendre $A_n = 1$ si n est pair et 0 sinon.

Autrement dit, $a_n = A_n - A_{n-1} = (-1)^n$.

22) L'idée est de prendre une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contenant beaucoup de termes nuls, de sorte à ce que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas trop vite vers 0. On sait que $\sum_{p\geq 1} \frac{1}{p^2}$ converge (par comparaison avec $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$).

On peut donc choisir $a_n = \frac{1}{n} = \frac{1}{p^2}$ si $n = p^2$, et 0 sinon.

23) a) La fonction $f(t) = \dfrac{1}{1+t}$ convient.

b) L'idée est de prendre une fonction qui présente une infinité de pics de plus en plus effilés, chaque pic étant de hauteur 1, de sorte que la somme des aires des pics converge.

Par exemple, on peut considérer la fonction affine par morceaux qui vaut $f(n) = 1$ en chaque entier naturel non nul, et qui est nulle à l'exception des intervalles $[n - 2^{-n}, n + 2^{-n}]$.

Ainsi le pic situé en $n \in \mathbb{N}^*$ a une aire égale à $\frac{1}{2^n}$, donc la somme des aires converge vers 1.

Et f ne tend pas vers 0 en $+\infty$, car $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f(n) = 1$.

Fonctions de plusieurs variables

24) a) Soit $\overrightarrow{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. On considère la fonction $g : [0,1] \to \mathbb{R}^2 \quad t \longmapsto f(t\overrightarrow{x}) = f(tx, ty)$.

On a $g'(t) = x\dfrac{\partial f}{\partial x}(tx, ty) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(tx, ty) = \nabla f(t\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{x}$.

Par le th fondamental, $g(1) = g(0) + \int_0^1 g'(t)\, dt$, c'est-à-dire $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{0}) + \int_0^1 \nabla f(t\overrightarrow{x}) \cdot \overrightarrow{x}\, dt$.

b) Supposons (ii), c'est-à-dire $f(x, y) = ax + by + k$. Alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = a$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) = b$.

Donc les dérivées d'ordre 2 sont identiquement nulles.

Supposons (i). L'idée est d'appliquer a) aux dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, qui sont de gradients nuls :

On a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0) + \int_0^1 x\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(tx, ty) + y\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(tx, ty)\, dt = \dfrac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. De même pour $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

Donc les dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes, donc le gradient ∇f est constant.

Il existe donc $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$, $f(\overrightarrow{x}) = \overrightarrow{v}$.

Par a), on obtient donc $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$, $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{0}) + \int_0^1 \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x}\, dt = f(\overrightarrow{0}) + \overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{x}$. D'où (ii).