Classe de PC*3 - été 2025 - exemples

Combinatoire et probabilités

1) On considère p tirages d'une boule dans une urne contenant n boules numérotées.

Les tirages sont dits ordonnés si on distingue l'ordre dans lequel les tirages sont effectués.

a) Déterminer le nombre N de tirages ordonnés et avec remise

b) Déterminer le nombre N de tirages ordonnés sans remise

c) Déterminer le nombre N de tirages non ordonnés et sans remise

d) (★) Déterminer le nombre N de tirages non ordonnés et avec remise (on devrait plutôt formuler en définissant N comme le nombre de configurations possibles après un tirage sans remise, c'est-à-dire, pour chaque boule, le nombre de fois où elle a été tirée).

Remarque : Ces configurations ne sont pas équiprobables lors d'un tirage avec remise, mais on demande ici seulement de dénombrer les configurations.

2) Soient deux entiers $n \geq m$. On effectue m tirages sans remise dans une urne contenant n boules numérotées de 1 à n.

On note X le plus petit numéro parmi les m boules choisies lors du tirage. Calculer $P(X > k)$, où $0 \leq k \leq n$.

3) Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé (Ω, P).

Est-il possible d'avoir simultanément $P(A \mid B) = \dfrac{1}{2}$, $P(A) = \dfrac{1}{2}$ et $P(B \mid A) = \dfrac{1}{3}$?

4) a) Soient $n \in \mathbb{N}$, et $a_1, ..., a_n$ des réels appartenant à $]0, 1[$. Proposer un espace fini probabilisé (Ω, P) et une famille $(A_k)_{1 \leq k \leq n}$ d'événements indépendants tels que $\forall k \in \{1, 2, ..., n\},\ \ P(A_k) = a_k$.

b) En déduire que $\prod_{k=1}^{n}(1 - a_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^{n} a_k$.

Polynômes

5) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

Trouver un polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n à racines simples tel que $P(0) \neq 0$ et $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z) = 0 \Rightarrow P(z^2) = 0$.

6) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe pas de polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall z \in \mathbb{C}$, $P(z)^2 = z^n - 1$.

7) a) Trouver un polynôme P dans $\mathbb{C}[X]$ à racines simples tel que P' n'est pas scindé à racines simples.

b) Existe-t-il un tel polynôme dans $\mathbb{R}[X]$?

8) *Les deux questions sont indépendantes*

a) Soient $a \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Expliciter un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall k \in \{0, 1, ..., n\}$, $P^{(k)}(a) = 1$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ de degré $< n$ tel que $\forall k \in \{1, ..., n\}$, $P(k) = k^n$.

Algèbre linéaire et matrices

9) On considère dans $\mathbb{R}^n$ la droite vectorielle $D = \mathbb{R}Z$, où $Z = (a_1, a_2, ..., a_n)$.

Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont l'image est D et dont le noyau est l'hyperplan $D^\perp$.

Remarque : On devrait en toute rigueur parler de l'image et du noyau de l'endomorphisme associé à A.

Rappel : Un hyperplan de $\mathbb{R}^n$ est un sous-espace vectoriel de dimension $n-1$.

10) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier pair. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ de rang $r = \dfrac{n}{2}$ telle que $A^2 = O_n$.

11) Soit un entier naturel $n \geq 2$. Trouver deux matrices A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$ telles que $AB = O_n$ et $BA \neq O_n$.

12) Soit $\alpha \in \mathbb{R}^*$. On pose $M = \begin{pmatrix} \lambda & \alpha \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$. Trouver $P \in GL_2(\mathbb{R})$ tel que $P^{-1}MP = N$.

13) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_n(K)$ telle que $A^n = O_n$ et $A^{n-1} \neq O_n$.

14) Expliciter une infinité de matrices $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telles que $A^2 = A$.

15) a) Trouver une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ de rang 1 et de trace nulle.

b) Existe-t-il une matrice de projection vérifiant les propriétés du a) ?

Fonctions continues et fonctions dérivables

16) a) Soient des réels $a < b$. Expliciter une bijection de classe C^∞ de $[0,1]$ sur $[a,b]$.

b) Expliciter une bijection de classe C^∞ de $[0,1]$ sur $[0,+\infty[$.

17) Proposer une fonction $f :]0,1] \to \mathbb{R}$ continue, bornée et n'admettant pas de prolongement par continuité en 0.

18) Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, surjective et admettant un nombre fini de zéros.

19) Expliciter une fonction continue $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ dont l'ensemble des zéros est $\left\{\dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\} \cup \{0\}$.

20) Soit $n \in \mathbb{N}$.

Donner un exemple de fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^n telle que $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq 1 \Rightarrow f(x) = 0$.

21) a) Proposer une fonction strictement positive $f :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ telle qu'en 0^+, on a $\forall n \in \mathbb{N},\ f(x) = \mathfrak{o}\left(x^n\right)$.

b) (★) Donner un exemple de fonction $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ telle que $\forall x > 0,\ f(x) > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\lim_{x\to 0, x>0} f^{(n)}(x) = 0$.

Séries et intégrales

22) Proposer une série divergente $\sum a_n$ telle que la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée (où $A_n = \sum_{k=0}^n a_k$).

23) Proposer une série convergente $\sum a_n$ à termes positifs et telle que $(na_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0 en $+\infty$.

Fonctions de plusieurs variables

24) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \quad (x,y) \longmapsto f(x,y)$ de classe C^1.

On note $\nabla f(\overrightarrow{x})$ le gradient de f en $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$. On note $\langle \overrightarrow{x}, \overrightarrow{y} \rangle$ le produit scalaire canonique dans $\mathbb{R}^2$.

a) Montrer que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$, $f(\overrightarrow{x}) = f(\overrightarrow{0}) + \int_0^1 \langle \nabla f(t\overrightarrow{x}), \overrightarrow{x} \rangle \ dt$.

Remarque : Autrement dit, $f(x,y) = f(0,0) + \int_0^1 x\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(tx,ty) + y\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(tx,ty)\ dt$.

b) On dit que f est de classe C^2 ssi $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$.

On note $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)$.

Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Les dérivées partielles de f d'ordre 2 sont nulles, c'est-à-dire $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

(ii) Il existe $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^2$ et $k \in \mathbb{R}$ tels que $\forall \overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^2$, $f(\overrightarrow{x}) = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{x} \rangle + k$.

Autrement dit, f est affine, c'est-à-dire de la forme $f(x,y) = ax + by + k$.