Exemples de sujets d'oraux. Indications

1) On pose $g = f - \mathrm{Id}$. Il s'agit de prouver que g admet au moins un zéro. Or, on a par hypothèse $\int_0^1 g = 0$.

On ne peut pas avoir ni $g > 0$ ni $g < 0$. Donc g n'est pas de signe constant non nul. Conclure avec le TVI.

2) a) Montrer avec le théorème de d'Alembert-Gauss que tout polynôme non constant convient :

En effet, $P(z) = c \Leftrightarrow Q(z) = 0$, où $Q(X) = P(X) - c$.

b) Supposons $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$. Les polynômes P et $\overline{P}$ coïncident sur $\mathbb{R}$, donc sont égaux, donc P est réel.

Variante : En utilisant l'interpolation de Lagrange : supposons $P(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$ et P ,non nul.

P est son propre polynôme d'interpolation en $0, 1, ..., n$ et on a $\forall k \in [\![0, n]\!]$, $P(k) \in \mathbb{R}$.

Donc P est réel. *Remarque* : On a $P(x) = \sum_{k=0}^{n} P(k) L_k(x)$, où $L_k(x) = \prod_{j \neq k} \frac{x-j}{k-j}$.

Supposons maintenant P réel.

Par le TVI, $P(\mathbb{R})$ est un intervalle. Donc $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ssi P n'est ni majorée ni minorée.

En conclure que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ ssi P est un polynôme réel de degré impair (considérer $\lim_{-\infty} P$ et $\lim_{+\infty} P$).

3) a) On a : $\operatorname{card} A_n = 2^{(n^2)}$.

b) Utiliser la méthode du pivot en ajoutant ou en retranchant la première ligne à chacune des autres lignes.

On se ramène à une matrice $\left(\begin{array}{c|c} \pm 1 & * \\ \hline O & 2M \end{array}\right)$, où les coefficients de M valent 0, 1 ou -1. D'où $\det M \in \mathbb{Z}$.

On obteint donc finalement $\pm 1 \times \det(2M) = \pm 2^{n-1} \det(M)$, ce qui permet de conclure.

Remarque : Le fait que le déterminant d'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z})$ est entier se prouve par récurrence en utilisant le développement du déterminant selon une ligne (ou une colonne).

4) On numérote les objets et les boîtes. Une configuration est définie formellement par une application $f : [\![1, n]\!] \to [\![1, n-1]\!]$ où $f(k)$ est le numéro de la boîte où est placé l'objet de numéro k.

L'univers est donc ici l'ensemble des $(n-1)^n$ fonctions de $[\![1, n]\!]$ dans $[\![1, n-1]\!]$ muni de la loi de probabilité uniforme. On cherche la probabilité p pour que f soit surjective.

Pour construire une telle surjection f, on choisit l'unique élément $y \in [\![1, n-1]\!]$ admettant deux antécédents par f, puis la paire $\{x, x'\}$ des antécédents de y par f, puis la bijection des $(n-2)$ éléments restants de $[\![1, n]\!]$ sur les $(n-2)$ éléments restants de $[\![1, n-1]\!]$.

Il y a donc $n \times \binom{n}{2} \times (n-2)!$ surjections. Donc $p = \dfrac{(n-1) \times \binom{n}{2} \times (n-2)!}{(n-1)^n} = \dfrac{n!}{2(n-1)^{n-1}}$.

5) a) Il y a n^n applications de E dans E.

Il y a n^{n-1} applications f de E dans E telles que $f(x) = y$. Donc $P(f(x) = y) = \dfrac{n^{n-1}}{n^n} = \dfrac{1}{n}$.

Soient $x_1, ..., x_p \in E$ distincts.

Il y a n^{n-p} applications f de E dans E telles que $f(x_1) = ... = f(x_p) = y$.

Donc $P(f(x_1) = y, f(x_2) = y, ..., f(x_p) = y) = \dfrac{n^{n-p}}{n^n} = \dfrac{1}{n^p} = \prod_{k=1}^p P(f(x_k) = y)$.

Donc les événements A_x, où $x \in E$, sont indépendants.

Or, on a $N_y = \sum_{x \in E} 1_{f(x)=y}$.

Donc N_y est somme de n variables indépendantes et de loi de Bernoulli $\dfrac{1}{n}$.

Donc N_y suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, \dfrac{1}{n})$.

b) On a $X = \sum_{y \in E} 1_{N_y \geq 3}$. Donc $E(X) = \sum_{y \in E} P(N_y \geq 3)$.

Par a), $P(N_y \geq 3) = 1 - \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n - \binom{n}{1}\dfrac{1}{n}\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-1} - \binom{n}{2}\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^{n-2}$.

On a donc $\lim_{n \to +\infty} P(N_y \geq 3) = 1 - \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2}\right)e^{-1} = \left(1 - \dfrac{5}{2e}\right)$.

On en déduit que $E(X) \sim \lambda n$, où $\lambda = 1 - \dfrac{5}{2e}$.

6) Posons $\varphi = g - f$. Ainsi, φ est positive et $\varphi(x_0) = 0$. Posons $\lambda = \varphi'(x_0)$.

Supposons par l'absurde $\lambda \neq 0$. Alors, par Taylor-Young, $\varphi(x_0 + h) \sim \lambda h$ lorsque $h \to 0$.

Donc φ change de signe en x_0, et a fortiori φ ne peut pas être positive. D'où une contradiction.

7) Δ est bien linéaire de F dans F, et en particulier, $(y_1, ..., y_n) = \Delta(x_1, ..., x_n) \in F$.

Comme F est de dimension finie, il suffit donc de prouver que Δ est injective, c'est-à-dire $\operatorname{Ker} \Delta = \{(0, ..., 0)\}$.

Considérons $(x_1, ..., x_n) \in \operatorname{Ker} \Delta$. On a ainsi $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i = 0$.

On a donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 d'équation caractéristique $z^2 - 2z + 1 = 0$ de racine double 1.

Il existe donc $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $\forall i \in [\![0, n]\!]$, $x_i = ai + b$.

(*Remarque* : On peut aussi déduire cette progression arithmétique en notant que $x_{i+1} - x_i = x_i - x_{i-1}$).

Sachant que $x_1 = x_n = 0$, en conclure que $a = b = 0$. Donc $\operatorname{Ker} \Delta = \{(0, 0, ..., 0)\}$.

8) Justifier d'abord avec la relation de Grassmann que $\dim(G \cap F) \geq \dim G - \operatorname{codim} F$, où $\operatorname{codim} F = n - \dim F$..

En déduire pour a) par récurrence sur p : $\dim(H_1 \cap ... \cap H_p) = \dim(E \cap H_1 \cap ... \cap H_p) \geq n - p$.

Remarque : On peut aussi raisonner matriciellement. On se ramène au cas $E = K^n$ en considérant une base arbitraire de E. Alors $H_1 \cap ... \cap H_p$ est défini par un système linéaire homogène $AX = O$ de p équations à n inconnues.

On a donc $\dim(H_1 \cap ... \cap H_p) = n - \operatorname{rg} A$, et $\operatorname{rg} A \leq p$, car p est le nombre de lignes de $A \in \mathcal{M}_{p,n}(K)$.

b) De façon analogue, on a : $\dim(F_1 \cap ... \cap F_p) \geq \dim E - \sum_{k=1}^p \operatorname{codim}(F_k) = n - \sum_{k=1}^p (n - d_k)$.

c) D'où la condition $n - \sum_{k=1}^p (n - d_k) > 0$, c'est-à-dire $\sum_{k=1}^p d_k > (p-1)n$.

9) a) $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x\sin(x)$ convient. En effet, f est continue, n'est ni majorée ni minorée, donc son image est bien $\mathbb{R}$ (le seul intervalle réel qui n'est ni majoré ni minoré).

b) Supposons par l'absurde qu'il existe une surjection continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admettant un nombre fini de zéros.

En particulier, il existe $a > 0$ tel que $\forall x \geq a,\ f(x) \neq 0$.

Par le TVI (théorème des valeurs intermédiaires), la fonction f est de signe constant sur $[a, +\infty[$.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que f est strictement positive sur $[a, +\infty[$.

D'autre part, la fonction continue f est bornée sur le segment $[0, a]$.

On en déduit que f est minorée sur $[0, a]$ et sur $[a, +\infty[$, donc est minorée sur $[0, +\infty[$, ce qui contredit f surjective.

10) Il existe M tel que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x+1) - f(x)| \leq M$. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ \forall n \in \mathbb{Z},\ |f(x+r) - f(x)| \leq |n|\, M$.

En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| \leq |n|\, M + K$, où $n = \lfloor x \rfloor$ et $K = \sup_{[0,1]} |f|$.

Comme $|n| \leq |x| + 1$ (attention au cas $x \in \mathbb{R}^-$ ...), alors on en conclut $|f(x)| \leq |x|\, M + (M + K)$.

11) Considérons les $n(n-1)$ couples (a, b) d'éléments distincts de $[\![1, p]\!]$.

Il y en a exactement $2(k-1)$ tels que $\max(a, b) = k$,c'est-à-dire ($a = k$ et $b < k$) ou ($a < k$ et $b = k$).

D'où $P(Y = k) = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}$, donc $E(Y) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (k-1)k = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{k=1}^{n} (k^2 - k) = ... = \frac{2(n+1)}{3}$.

Comme Z suit la loi uniforme sur $[\![1, p]\!]$, il en est donc de même de la variable $(n + 1 - Z)$.

Par symétrie, la loi de X est donc identique à la loi de $n + 1 - Y$. On en déduit donc $E(X) = \frac{1}{3}(n+1)$.

Remarque : En fait, on peut donner un argument plus simple justifiant $E(X) = \frac{1}{3}(n+1)$ et $E(Y) = \frac{2}{3}(n+1)$.

En effet, considérons un troisième jeton Z.

La v.a. (X, Y, Z) suit une loi uniforme (sur l'ensemble des triplets injectifs appartenant à $\{1, 2, ..., n\}^3$).

Donc les événements $Z < X$, $X < Z < Y$ et $Y < Z$ sont équiprobables.

Donc X, $Y - X$ et $n + 1 - Y$ ont même espérance.

Or la somme de ces trois v.a. vaut $(n+1)$. Donc $E(X) = E(Y - X) = \frac{1}{3}(n+1)$. D'où $E(Y) = \frac{2}{3}(n+1)$.

12) a) $A(f)$ est le noyau de l'application linéaire $g \longmapsto f \circ g \circ f$ définie de $\mathcal{L}(F, E)$ dans $\mathcal{L}(E, F)$.

Donc $A(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(F, E)$.

b) Notons tout d'abord que $f \circ g \circ f = 0$ équivaut à $\operatorname{Im}(g \circ f) \subset \operatorname{Ker} f$, c'est-à-dire $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Ker} f$.

On considère une base $\mathcal{B}$ de E adaptée à $\operatorname{Ker} f \oplus S = E$ et une base $\mathcal{C}$ de F adaptée à $\operatorname{Im} f \oplus T = F$.

Alors $g \in A(f)$ ssi $g(\operatorname{Im} f) \subset \operatorname{Ker} f$ donc ssi $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, g = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O_{r,r} & C \end{array}\right)$, avec $r = \operatorname{rg} f$ et $p - r = \dim \operatorname{Ker} f$.

On en déduit (par l'isomorphisme $\mathcal{L}(F, E) \to \mathcal{M}_{p,n}(K)\quad g \longmapsto \operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, g$) que $\dim A(f) = pn - r^2$.

c) On a toujours $r \leq \min(n, p)$.

On a $\dim A(f) = 0$ ssi $r = p = n$, c'est-à-dire ssi f est un isomorphisme de E sur F.

13) a) Pour trouver les coordonnées de P, il suffit d'écrire que P est de la forme $(1, t)$ et que P appartient à (AM), c'est-à-dire $\det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AP}) = 0$, c'est-à-dire $\begin{vmatrix} 1+\cos\theta & 2 \\ \sin\theta & t \end{vmatrix} = 0$. Donc $t = \dfrac{2\sin\theta}{1+\cos\theta} = \dfrac{4\sin(\frac{\theta}{2})\cos(\frac{\theta}{2})}{2\cos(\frac{\theta}{2})^2} = 2\tan(\frac{\theta}{2})$.

Remarque culturelle : Faire un schéma ; on retrouve la propriété de l'angle au centre : la droite (AM) fait un angle $\frac{\theta}{2}$ avec l'axe (Ox).

b) Il résulte de a) que i) et ii) sont équivalentes.

i) implique iii), car en vertu des formules de trigonométrie, $\cos\theta = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ et $\sin\theta = \frac{2t}{1+t^2}$.

iii) implique ii), car M est à coordonnées rationnelles, $t = \frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}$ est aussi rationnel.

c) On sait que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$: en effet, tout réel α est limite de rationnels : $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\lfloor n\alpha \rfloor}{n}$.

Soit $M(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta) \in \Gamma$. Posons $t = \tan(\frac{\theta}{2})$.

Il existe une suite de nombres rationnels $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$.

On pose $\theta_n = 2\arctan(t_n)$. Ainsi, $t_n = \tan(\frac{\theta_n}{2})$ et $M(\theta_n) \in \Delta$.

Comme $\lim_{n\to+\infty} t_n = t$, alors $\lim_{n\to+\infty} \theta_n = \theta$, et ainsi $\lim_{n\to+\infty} M(\theta_n) = M(\theta)$.

14) a) En supposant par l'absurde que f' ne s'annule pas, justifier et utiliser la stricte monotonie de f.

b) En utilisant l'inégalité des accroissements finis, justifier que $\forall x \geq A$, $|f(x)| \geq \delta\,|x - A| - |f(a)| = L(x)$.

Or, on a $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{L(x)}{x} = \delta$.

On prend $\lambda \in]0, \delta[$. Pour x assez grand (et strictement positif), on a donc $\dfrac{L(x)}{x} \geq \lambda$.

Ainsi, $|f(x)| \geq \lambda x$ au voisinage de $+\infty$.

La propriété est analogue en $-\infty$: S'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que $\forall x \leq A$, $|f'(x)| \geq \delta$, alors il existe $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| \geq \lambda\,|x|$ au voisinage de $-\infty$ (c'est-à-dire sur un intervalle $]-\infty, x_0]$).

c) On suppose par l'absurde que f'' ne s'annule pas, donc est de signe contant : ainsi, f' est strictement monotone d'où on déduit l'existence de $\lim_{+\infty} f'$ et $\lim_{-\infty} f'$ (finies ou infinies, par le th de la limite monotone). En raisonnant par l'absurde, déduire de b) que $\lim_{+\infty} f' = 0$ et $\lim_{-\infty} f' = 0$, ce qui contredit la stricte monotonie de f'.

Remarque : La propriété se généralise de façon analogue :

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} et si.$f(x) = \mathfrak{o}\left(|x|^n\right)$ pour $|x| \to +\infty$, alors $f^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

15) a) $\operatorname{Im} u$ est toujours stable par u. Comme $\operatorname{rg} u^2 = \dim u(\operatorname{Im} u)$, La restriction v de u à $\operatorname{Im} u$ est surjective, donc bijective. Donc v^k est aussi un isomorphisme pour tout $k \in \mathbb{N}$, donc $v^k(\operatorname{Im} u) = \operatorname{Im} u$, c'est-à-dire $\operatorname{rg} u^{k+1} = \operatorname{rg} u$.

b) Supposons par l'absurde que A existe. On note u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

On a $\operatorname{rg} u < 3$ (car sinon, u^2 serait aussi bijectif). Or, $\operatorname{rg} u^2 = 2$, donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2 = 2$.

Donc par a), $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{rg} u^p = 2$. Mais $\left(A^2\right)^3 = O_3$, c'est-à-dire $u^6 = 0$, d'où une contradiction.

16) On pose $A = \{a_1, ..., a_n\}$, avec $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

a) Considérer le tableau symétrique $n \times n$ dont l'élément d'indice (i, j) est $a_i + a_j$.

b) On suppose connue l'unicité de l'écriture en base 2 des entiers naturels, c'est-à-dire que tout entier n s'écrit de façon unique $n = \sum_i \varepsilon_i 2^i$, avec $\varepsilon_i \in \{0, 1\}$.

Autrement dit, tout entier n s'écrit de façon unique comme somme de termes de la forme 2^i.

Ainsi, on peut prendre $a_i = 2^{i-1}$.

17) a) $Y_n = \dfrac{\sum_{k=1}^{n} Z_k 2^{n-k}}{2^k} = \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} Z_{n-j} 2^j}{2^k}$.

Or, tout entier $k \in [\![0, 2^n - 1]\!]$ s'écrit de façon unique sous la forme $k = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon_j 2^j$, avec $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$.

On en déduit que Y_n suit la loi *uniforme* sur l'ensemble fini $\Delta_n = \left\{ \dfrac{k}{2^n}, \ 0 \leq k < 2^n \right\}$.

b) Donc $E(Y_n) = \dfrac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{2^n-1} f\left(\dfrac{k}{2^n}\right)$. On reconnaît une somme de Riemann associée la subdivision régulière Δ_n.

On en déduit (cf cours sur les sommes de Riemann = méthode des rectangles) que $\lim_{n\to+\infty} E(Y_n) = \int_0^1 f(t)\ dt$.

18) a) On pose $f(x) = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_k}$. On a $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_n\}$, $f'(x) = -\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(x - x_k)^2}$.

Dans le cas où on ne voit pas comment la représenter, prendre un cas particulier, par exemple $n = 4$.

La fonction f est strictement décroissante sur chacun des intervalles de son ensemble de définition, à savoir les intervalles $]x_k, x_{k+1}[$ avec $1 \leq k < n$, et les intervalles $] - \infty, 1[$ et $]n, +\infty[$. Ainsi, on a :

x	$+\infty$		x_1^-	x_1^+		x_2^-	x_2^+	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	x_n^-	x_n^+		$+\infty$
$f(x)$	0	$\searrow$		$+\infty$	$\searrow$		$+\infty$	$\searrow$			$\searrow$		$+\infty$	$\searrow$	
			$-\infty$			$-\infty$						$-\infty$			0

Par le tableau de variations, et compte tenu des limites aux bords des intervalles, on conclut que l'équation $f(x) = 1$ admet exactement n solutions, qu'on note $y_1, ..., y_n$, vérifiant

$$x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < ... < y_{n-1} < x_n < y_n$$

On a donc $A =]x_1, y_1] \cup]x_2, y_2] \cup ... \cup]x_n, y_n]$ union disjointe d'intervalles.

b) *Principe* : $f(x) = \dfrac{1}{x - x_1} + ... + \dfrac{1}{x - x_n}$ est une fraction rationnelle et se met sous la forme $\dfrac{Q(x)}{P(x)}$, où $P(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$ et où $Q(x)$ est un polynôme de degré $n - 1$ et de coefficient dominant n.

En effet, $Q(x) = \sum_{k=1}^{n} \prod_{1 \leq j \leq n \text{ et } j \neq k} (x - x_j)$.

Les réels $y_1, ..., y_n$ sont donc des racines de l'équation $Q(x) = P(x)$.

Comme $\deg(P - P') = n$, ce sont *les* seules racines de $P - Q$, et $P - Q$ est scindé à racines simples.

Or, on veut calculer $S = \sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k - \sum_{k=1}^{n} x_k$.

On va utiliser les relations entre coefficients et racines d'un polynôme scindé.

Le polynôme $P-Q$ est unitaire de degré n, et le coefficient en x^{n-1} vaut $-\left(n+\sum_{k=1}^n x_k\right)$.

En utilisant les relations entre coefficients et racines, on a donc $\sum_{k=1}^n y_k = \left(\sum_{k=1}^n x_k\right)+n$.

On en déduit $S=n$.

Remarque : En fait, $f(x)$ est la dérivée de $\ln|P(x)|$, où $P(x)=\prod_{k=1}^n (x-x_k)$.
Autrement dit, $f(x)=\dfrac{P'(x)}{P(x)}$. L'équation $f(x)=1$ s'écrit donc $\dfrac{P'(x)}{P(x)}=1$, où $P(x)=\prod_{k=1}^n (x-x_k)$.

19) Il s'agit de prouver que $\sin(nx)=Q(\sin x)$, où $Q(X)=nX\prod_{k=1}^m\left(1-\dfrac{X^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$ polynôme de degré n.

- *La première étape* est de montrer que n étant impair, on a : $\sin(nx)=P(\sin x)$ polynôme en $\sin x$.

Il s'agit d'une propriété analogue à celle des polynômes de Tchebychev $\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$.

(on peut même s'y ramener en considérant un changement de variable $\theta=\frac{\pi}{2}-x$.

L'imparité de n est nécessaire car $n\frac{\pi}{2}$ est alors congru à $\frac{\pi}{2}$ module π, d'où un terme en sinus).

Sans utiliser Tchebychev, on peut expliciter P en considérant $\sin(nx)=\operatorname{Im}\left((\cos x+i\sin x)^n\right)$.

Par le binôme, $\sin(nx)=\sum_{k \text{ impair}}\binom{n}{k}(\sin x)^k i^{k-1}(\cos x)^{n-k}=\sum_{j=0}^m(-1)^j\binom{n}{2j+1}(\sin x)^{2j+1}(\cos x)^{2(m-j)}$.

Avec $\cos^2=1-\sin^2$, on obtient finalement $P(X)=\sum_{j=0}^m(-1)^j\binom{n}{2j+1}X^{2j+1}(1-X^2)^{m-j}$, et $\deg P\leq n$.

- *La deuxième étape consiste à factoriser* P. L'expression explicite de P n'est pas utile ...

On cherche des racines réelles de P. Or, $\sin x$ est racine de P ssi $\sin(nx)=0$.

On en déduit que les $\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$, avec $-m\leq k\leq m$ sont des racines distinctes de P.

Comme il y a en a n et que $\deg P\leq n$, alors ce sont les seules racines de P, et elles sont simples.

Ayant les mêmes racines, $P(X)$ est donc proportionnel à $Q(X)=nX\prod_{k=1}^m\left(1-\dfrac{X^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$.

Ainsi, il existe $\lambda\in\mathbb{R}^*$ tel que

$$\sin(nx)=\lambda(\sin x)\prod_{k=1}^m\left(1-\frac{(\sin x)^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$$

En considérant un équivalent lorsque x tend vers 0^+, on obtient $nx\sim\lambda x$, donc $\lambda=n$, ce qui permet de conclure.

20) a) On a $|E(f(X))-f(x_0)|=|E(f(X)-f(x_0))|\leq E(|f(X)-f(x_0)|)$.

On écrit $|f(X)-f(x_0)|=|f(X)-f(x_0)|\,1_A+|f(X)-f(x_0)|\,1_{\overline{A}}$, où 1_A est la fonction caractéristique de A.

Comme $|f(X)-f(x_0)|\,1_A\leq\varepsilon$, alors $E(|f(X)-f(x_0)|\,1_A)\leq\varepsilon\ E(1_A)=\varepsilon\ P(A)$.

De même, $|f(X)-f(x_0)|\leq 2M\times 1_{\overline{A}}$, donc $E(|f(X)-f(x_0)|\,1_{\overline{A}})\leq 2M\ E(1_{\overline{A}})=2M\ P(\overline{A})$.

Donc $E(|f(X)-f(x_0)|)\leq\varepsilon\ P(A)+2M\ P(\overline{A})\leq\varepsilon+2M\ P(\overline{A})$.

b) nX_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n,\frac{1}{2})$.

Par Bienaymé-Tchebychev, on a $\forall\alpha>0$, $P\left(\left|X_n-\frac{1}{2}\right|>\alpha\right)\leq\dfrac{V(X_n)}{\alpha^2}=\dfrac{1}{4n\alpha^2}$.

On dit que la loi de X_n converge en probabilité vers la constante $\frac{1}{2}$.

On peut donc s'attendre à $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(\frac{1}{2})$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme f est continue, il existe $\alpha > 0$ tel que $\forall x \in [0,1]$, $\left|x - \frac{1}{2}\right| \leq \alpha \Rightarrow \left|f(x) - f(\frac{1}{2})\right| \leq \varepsilon$.

De ce fait, l'événement $A : \left|f(X_n) - f(\frac{1}{2})\right| \leq \varepsilon$ contient l'événement $B : \left|X_n - \frac{1}{2}\right| \leq \alpha$, d'où $P(\overline{A}) \leq P(\overline{B})$.

On déduit de a) que $\left|E(f(X_n)) - f(\frac{1}{2})\right| \leq \varepsilon + 2M\ P(\overline{A}) \leq \varepsilon + \dfrac{2M}{4n\alpha^2}$.

Ainsi, pour n assez grand, $\left|E(f(X_n)) - f(\frac{1}{2})\right| \leq 2\varepsilon$.

Comme ε peut être choisi arbitrairement petit, on en déduit $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n)) = f(\frac{1}{2})$.

21) a) On a $u_{n+1} = f(u_n)$, avec $u_0 = 0$ et $f(x) = \sqrt{1+x}$.

La fonction f admet un unique point fixe $\varphi = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$ sur $[0, +\infty[$.

L'intervalle $[0, \varphi[$ est stable par f et $\forall x \in [0, \varphi[,\ f(x) > x$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans $[0, \varphi[$ et est strictement croissante, donc converge.

Par continuité, sa limite L vérifie $f(L) = L$, donc $L = \varphi$.

b) On a $u_n(\lambda, ..., \lambda) = \lambda u_n(1, ..., 1)$. On déduit de a) que $\lim_{n\to+\infty} u_n(\lambda, ..., \lambda) = \lambda\varphi$.

c) On peut considérer u_n comme une fonction de $(a_1, ..., a_n)$, ce qu'on note $u_n(a_1, ..., a_n)$.

On note $(a_1, ..., a_n) \preceq (b_1, ..., b_n)$ ssi $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $a_k \leq b_k$.

- Montrons que u_n est une fonction croissante : $(a_1, ..., a_n) \preceq (b_1, ..., b_n) \Rightarrow\ u_n(a_1, ..., a_n) \leq u_n(b_1, ..., b_n)$.

On montre cette propriété par récurrence sur n et en utilisant $u_n(a_1, ..., a_n) = u_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1} + \sqrt{a_n})$.

- On en déduit en particulier que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante :

En effet, $u_n = u_n(a_1, ..., a_n) = u_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1} + \sqrt{a_n}) \geq u_{n-1}(a_1, ..., a_{n-1} + 0) = u_{n-1}$.

- Supposons $\ln a_n = O(2^n)$: la suite $(2^{-n} \ln a_n)$ est donc majorée à partir d'un certain rang, donc majorée.

Il existe donc M tel que $\ln a_n \leq M2^n$, c'est-à-dire $a_n \leq \lambda^{(2^n)}$, où $\lambda = e^M$.

Donc $u_n(a_1, ..., a_n) \leq \lambda u_n(1, 1, ..., 1)$. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par $\lambda\varphi$), donc converge.

- Supposons que $\ln a_n$ n'est pas en $O(2^n)$, c'est-à-dire supposons que la suite $(2^{-n} \ln a_n)$ n'est pas majorée.

Pour tout M réel ≥ 0, on peut donc trouver un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $\ln a_p \geq M2^p$, c'est-à-dire $a_p \geq e^{M2^p}$.

On en déduit que $u_p(a_1, ..., a_p) \geq u_p(0, 0, ..., 0, e^{M2^p}) = e^M$, donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée.

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, alors $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

22) a) Il suffit de choisir f telle que $\dfrac{f'(x)}{f(x)} = L$. Par exemple, $f(x) = e^{Lx}$ convient.

b) Pour tout b tel que $L < b < 0$, on a $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leq b$ pour $x \geq p$ entier assez grand.

Pour tout $n \geq p$, on intègre l'inégalité $\dfrac{f'(x)}{f(x)} \leq b$ sur $[p, n]$, c'est-à-dire $\int_p^n \dfrac{f'(x)}{f(x)}\, dx \leq b$.

On obtient donc $\forall n \geq p$, $\ln f(n) - \ln f(p) \leq (n-p)b$, c'est-à-dire $\forall n \geq p,\ f(n) \leq f(p)e^{b(n-p)}$.

Comme $b < 0$, la série géométrique $\sum e^{-bn}$ converge, donc on en déduit par comparaison que $\sum f(n)$ converge.

c) On procède comme au b), mais en effectuant un encadrement :

Soient a et b tels que $a < L < b < 0$. Il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $\forall x \geq p$, $a \leq \dfrac{f'(x)}{f(x)} \leq b$.

On prend $n \geq p$. Par intégration terme à terme sur $[n, k]$, on obtient $a(k-n) \leq [\ln f(x)]_n^k \leq b(k-n)$

Donc $\forall k \geq n$, $e^{a(k-n)} \leq \dfrac{f(k)}{f(n)} \leq e^{b(k-n)}$. Ainsi, $\forall k \geq n$, $f(n)e^{a(k-n)} \leq f(k) \leq f(n)e^{b(k-n)}$.

Donc en sommant $f(n)\sum_{k=n}^{+\infty} e^{a(k-n)} \leq R_n \leq f(n)\sum_{k=n}^{+\infty} e^{b(k-n)}$, c'est-à-dire $\dfrac{f(n)}{1-e^a} \leq R_n \leq \dfrac{f(n)}{1-e^b}$.

Comme a et b peuvent être choisis arbitrairement proches de L, on en conclut $R_n \sim f(n)$.

(Formellement : étant donné $\varepsilon > 0$, on peut trouver a et b tels que $\dfrac{1-\varepsilon}{1-e^L} \leq \dfrac{1}{1-e^a}$ et $\dfrac{1}{1-e^b} \leq \dfrac{1+\varepsilon}{1-e^L}$
Donc pour n assez grand, $(1-\varepsilon)\dfrac{f(n)}{1-e^L} \leq R_n \leq (1+\varepsilon)\dfrac{f(n)}{1-e^L}$, ce qu'on voulait prouver).

0) a) Comme F est de dimension finie, F admet une base $(P_1, ..., P_n)$, avec $n = \dim F \geq 1$.

Quitte à permuter l'ordre des vecteurs de la base, on seut supposer que $\deg P_n = \max_{1 \leq k \leq n} P_k$.

Noter que pour tout $(\lambda_1, ..., \lambda_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $(P_1 + \lambda_1 P_n, ..., P_{n-1} + \lambda_{n-1}P_n, P_n)$ est aussi une base de F.

Conclure en choisissant des valeurs judicieuses pour les λ_i.

b) On pourrait utiliser a) et procéder par récurrence sur n : cette fois, on choisit les λ_i de sorte que $\forall j < n$, $\deg(P_j + \lambda_j P_n) < \deg P_n$, et on applique l'hypothèse de récurrence à $\mathrm{Vect}(Q_1, ..., Q_{n-1})$, où $Q_j = P_j + \lambda_j P_n$.

Mais on peut aussi prouver le résultat directement en utilisant les opérations élémentaires sur les colonnes d'une matrice : on considère une base $(P_1, ..., P_n)$ de F et la matrice $M = \mathrm{Mat}_C(P_1, ..., P_n) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ de la famille $(P_1, ..., P_n)$ dans la base canonique $(1, X, X^2, ..., X^m)$, où m est le degré maximal des P_k.

Autrement dit, la j-ième colonne de M contient les coefficients du polynôme P_j. On a en particulier $\mathrm{rg}\, M = n$.

En effectuant des opérations élémentaires sur les colonnes de M, on ne modifie pas le sev engendré par les vecteurs colonnes (c'est-à-dire l'image de M), donc la matrice obtenue (qui est la forme MP, avec $P \in GL_n(\mathbb{R})$ inversible) définit encore une base de F.

Or, on sait qu'en opérant sur les colonnes de M, on peut transformer M en une matrice MP angulaire inférieure, c'est-à-dire de la forme

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ \blacksquare & * & \cdots & * \\ 0 & * & & * \\ 0 & \blacksquare & & * \\ \vdots & 0 & & * \\ 0 & 0 & & \blacksquare \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$, où les pivots $\blacksquare$ sont non nuls

Les polynômes définis par les colonne de MP sont de degrés échelonnés et forment une base de F.