Exemples de sujets posés aux oraux des concours

Les exercices sont *indépendants* et ceux marqués d'une étoile (★) sont a priori les plus difficiles.

1) (*X-ESPCI*) Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

2) (*Centrale*) a) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

b) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3) (*X-ESPCI*) On note Δ_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients appartiennent à $\{-1,1\}$.

a) Calculer $\operatorname{card}\Delta_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A \in \Delta_n$, alors $\det A$ est un entier multiple de 2^{n-1}.

4) (*Mines*) On répartit n objets dans $(n-1)$ boîtes. Déterminer la probabilité qu'aucune boîte ne soit vide.

Remarque : Il est sous-entendu ici que chaque objet est placé dans une boîte choisie selon la loi uniforme et que les placements des différents objets sont indépendants les uns des autres.

5) (*inspiré X-ESPCI*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $E = [\![1,n]\!]$.

On note Ω l'ensemble des fonctions de E dans lui-même. On munit Ω de la loi uniforme.

a) On fixe $y \in E$. Pour $x \in E$, on considère l'événement $A_x : f(x) = y$.

Montrer que les événéments A_x sont indépendants et que $\forall x \in E,\ P(f(x) = y) = \dfrac{1}{n}$.

En déduire la loi du nombre N_y d'antécédents de y par f.

b) Pour $f \in \Omega$, on note $X(f)$ le nombre d'éléments de E admettant au moins trois antécédents par f.

Déterminer un équivalent de $E(X)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

6) (*extrait X*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(x_0) = g(x_0)$ et $\forall x,\ f(x) \leq g(x)$.

Montrer que $f'(x_0) = g'(x_0)$.

7) (*extrait de X-ESPCI*) *Equation de Poisson discrète.*

On note $F = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n = 0\}$.

On considère $\Delta : F \to F \quad X = (x_1, ..., x_n) \longmapsto Y = (y_1, ..., y_n)$ définie par

$$y_1 = 0 \ \text{ et } \ y_n = 0 \ \text{ et } \ \forall i \in \{2, ..., n-1\}, \qquad y_i = x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i$$

Montrer que Δ est bijective.

Remarque culturelle : L'opérateur de dérivation discrète d'une suite est $\delta : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Ainsi, on a $\delta^2 : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. La résolution $\Delta(y) = 0$ est la version discrète de la résolution de l'équation différentielle $y'' = 0$ sur $[0, 1]$ avec les conditions initiales $y(0) = y(1) = 0$.

8) (*X-ESPCI*) Soit E un K-ev de dimension finie n, et H_k des hyperplans de E, avec $1 \leq k \leq p$.

a) Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_p) \geq n - p$.

b) Proposer de même une minoration de $\dim(F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_p)$, où les F_k sont des sev de E.

On posera $d_k = \dim F_k$.

c) Donner une condition suffisante pour qu'il existe un vecteur non nul commun aux F_k, avec $1 \leq k \leq p$.

9) (X) *Rappel* : Une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dite surjective ssi $f([0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

a) Donner un exemple d'application continue surjective $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

b) Montrer que toute application continue surjective $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admet un nombre infini de zéros.

10) (X) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que la fonction $x \longmapsto f(x + 1) - f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| \leq a\,|x| + b$.

11) (*Mines*) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément deux jetons.

On note X le numéro du plus petit numéro tiré, Y le numéro du plus grand.

Donner les lois de X et de Y. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

12) (*Mines*) (★) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimensions finies n et p.

On pose $A(f) = \{g \in \mathcal{L}(F, E) \mid f \circ g \circ f = 0\}$.

a) Montrer que $A(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(F, E)$.

b) Déterminer $\dim A(f)$.

Suggestion : Reformuler la condition $f \circ g \circ f = 0$ à l'aide de $g(\operatorname{Im} f)$ et $\operatorname{Ker} f$.

Considérer alors la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, g$ de g, où $\mathcal{C}$ est une base de F adaptée à $\operatorname{Im} f \oplus T = F$ et où $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à $\operatorname{Ker} f \oplus S = E$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $A(f) = \{0\}$.

13) (*inspiré X*) On considère Γ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, A le point $(-1, 0)$, et $M = (\cos\theta, \sin\theta) \in \Gamma$ distinct de A.

On note P l'intersection de la droite (AM) et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.

On note Δ l'ensemble des points de Γ dont les deux coordonnées appartiennent à $\mathbb{Q}$.

a) Expliciter les coordonnées du point P.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est à coordonnées rationnelles

(ii) $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ est un nombre rationnel

(iii) M est à coordonnées rationnelles, c'est-à-dire $M \in \Delta$

c) (★) Montrer que tout point de Γ est limite de points de Δ (on dit que Δ est dense dans Γ).

14) (X) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.

a) On suppose que $f(x) = \mathfrak{o}\,(1)$ pour $|x| \to +\infty$. Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que $\forall x \geq A$, $|f'(x)| \geq \delta$.

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| \geq \lambda x$ au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire pour x assez grand).

Proposer sans justification un énoncé analogue en $-\infty$.

c) (★) On suppose que $f(x) = \mathfrak{o}\,(|x|)$ pour $|x| \to +\infty$. Montrer que f'' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Indication : Raisonner par l'absurde et utiliser b).

15) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie, tel que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{rg} u^p = \operatorname{rg} u$.

b) (*ENS*) En considérant $\operatorname{rg} A$, montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

16) (*X-ESPCI*) (★) Soit A un ensemble fini de réels de cardinal $n \geq 2$. On pose $X = A + A = \{a+b, (a,b) \in A^2\}$.

a) Montrer que $2n - 1 \leq \operatorname{card} X \leq \frac{1}{2}n(n+1)$.

b) Donner un exemple où $\operatorname{card} X = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Suggestion : Exploiter l'unicité de l'écriture d'un entier naturel en base 2.

17) Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On considère

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{2^k}$$

a) Déterminer (sans calcul !) la loi de Y_n.

b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} E(f(Y_n))$.

18) (*X-EXPCI*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < x_2 < ... < x_n$ des réels distincts classés par ordre croissant.

a) Montrer que $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_n\} \mid \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x - x_k} \geq 1 \right\}$ est une réunion finie d'intervalles disjoints.

b) (★) On note S la somme des longueurs de ces intervalles. Montrer que $S = n$.

19) (*extrait ENS*) (★) Soit $n = 2m + 1$ un entier naturel impair. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(nx) = n(\sin x) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{(\sin x)^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$$

20) (*Centrale*) (★) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $M = \sup_{[0,1]} |f|$.

Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} Z_k$

a) Soit $\varepsilon > 0$. Soient $x_0 \in [0, 1]$ et X une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$.

On considère l'événement $A : |f(X) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Montrer que $|E(f(X)) - f(x_0)| \leq \varepsilon + 2M \ P(\overline{A})$.

b) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(f(X_n))$.

21) (*X-ESPCI*) Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + ... + \sqrt{a_n}}}$.

Remarque : On pourra noter $u_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ lorsqu'on considère u_n comme fonction des a_k.

a) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$. Déterminer $L = \lim_{n\to+\infty} u_n$.

b) Soit $\lambda > 0$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lambda^{(2^n)}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

c) (★) On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente ssi $\ln a_n = O(2^n)$.

22) (*X-ESPCI*) Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = L$, avec $L < 0$.

a) Donner un exemple d'une telle fonction.

b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.

c) (★) On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$. Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{1 - e^L} \ f(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

0) (*X MP*) (★) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie $n \geq 1$.

Remarque : F n'admet pas nécessairement de base composée de monômes X^k.

Par exemple, $F = \text{Vect}(X^2 + 1, X^4 + 1) = \text{Vect}(X^4 - X^2, X^4 + 1)$.

a) Montrer qu'il existe une base de F formée de polynômes de même degré.

b) Montrer qu'il existe une base de F formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.