Exemples de sujets posés aux oraux des concours

Les exercices sont *indépendants* et ceux marqués d'une étoile (★) sont *a priori* les plus difficiles.

1) (*X-ESPCI*) Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R})$ telle que $\int_0^1 f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}$. Montrer qu'il existe $a \in [0,1]$ tel que $f(a) = a$.

2) (*Centrale*) a) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.

b) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

3) (*X-ESPCI*) On note Δ_n l'ensemble des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients appartiennent à $\{-1,1\}$.

a) Calculer $\operatorname{card} \Delta_n$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si $A \in \Delta_n$, alors $\det A$ est un entier multiple de 2^{n-1}.

4) (*X-ESPCI*) On dispose d'un sac avec n cordes. A chaque étape, on tire au hasard deux extrémités de cordes, qu'on noue entre elles. Si elles sont les extrémités d'une même corde, on obtient une boucle qu'on met de côté. Sinon, on obtient une nouvelle corde qu'on remet dans le sac. On effectue des tirages tant qu'il reste des cordes dans le sac.

a) Calculer la probabilité p_1 qu'au premier tirage, les deux extrémités forment une boucle.

b) Déterminer l'espérance du nombre N_k de boucles après k tirages.

5) (*extrait X*) Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Soient f et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telles que $f(x_0) = g(x_0)$ et $\forall x,\ f(x) \leq g(x)$.

Montrer que $f'(x_0) = g'(x_0)$.

6) (*extrait de X-ESPCI*) *Equation de Poisson discrète.*

On note $F = \{X = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 = x_n = 0\}$.

On considère $\Delta : F \to F \quad X = (x_1, ..., x_n) \longmapsto Y = (y_1, ..., y_n)$ définie par

$$y_1 = 0 \ \text{ et } \ y_n = 0 \ \text{ et } \ \forall i \in \{2, ..., n-1\}, \qquad y_i = x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i$$

Montrer que Δ est bijective.

Remarque culturelle : L'opérateur de dérivation discrète d'une suite est $\delta : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+1} - x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Ainsi, on a $\delta^2 : (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \longmapsto (x_{n+2} + x_n - 2x_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$. La résolution $\Delta(y) = 0$ est la version discrète de la résolution de l'équation différentielle $y'' = 0$ sur $[0,1]$ avec les conditions initiales $y(0) = y(1) = 0$.

7) (*X-ESPCI*) Soit E un K-ev de dimension finie n, et H_k des hyperplans de E, avec $1 \leq k \leq p$.

a) Montrer que $\dim(H_1 \cap H_2 \cap ... \cap H_p) \geq n - p$.

b) Proposer de même une minoration de $\dim(F_1 \cap F_2 \cap ... \cap F_p)$, où les F_k sont des sev de E.

On posera $d_k = \dim F_k$.

c) Donner une condition suffisante pour qu'il existe un vecteur non nul commun aux F_k, avec $1 \leq k \leq p$.

8) (X) *Rappel* : Une application $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est dite surjective ssi $f([0, +\infty[) = \mathbb{R}$.

a) Donner un exemple d'application continue surjective $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$.

b) Montrer que toute application continue surjective $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ admet un nombre infini de zéros.

9) (X) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue. On suppose que la fonction $x \longmapsto f(x+1) - f(x)$ est bornée sur $\mathbb{R}$.

Montrer qu'il existe a et b tels que $\forall x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq a\,|x| + b$.

10) (*Mines*) Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n. On tire simultanément deux jetons.

On note X le numéro du plus petit numéro tiré, Y le numéro du plus grand.

Donner les lois de X et de Y. Calculer $E(X)$ et $E(Y)$.

11) (*Mines*) (★) Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, avec E et F de dimensions finies n et p.

On pose $A(f) = \{g \in \mathcal{L}(F, E) \mid f \circ g \circ f = 0\}$.

a) Montrer que $A(f)$ est un sev de $\mathcal{L}(F, E)$.

b) Déterminer $\dim A(f)$.

Suggestion : Reformuler la condition $f \circ g \circ f = 0$ à l'aide de $g(\operatorname{Im} f)$ et $\operatorname{Ker} f$.

Considérer alors la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}\, g$ de g, où $\mathcal{C}$ est une base de F adaptée à $\operatorname{Im} f \oplus T = F$ et où $\mathcal{B}$ est une base de E adaptée à $\operatorname{Ker} f \oplus S = E$.

c) Donner une condition nécessaire et suffisante sur f pour que $A(f) = \{0\}$.

12) (*inspiré X*) On considère Γ le cercle unité de $\mathbb{R}^2$, A le point $(-1, 0)$, et $M = (\cos\theta, \sin\theta) \in \Gamma$ distinct de A.

On note P l'intersection de la droite (AM) et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation $x = 1$.

On note Δ l'ensemble des points de Γ dont les deux coordonnées appartiennent à $\mathbb{Q}$.

a) Expliciter les coordonnées du point P.

b) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) P est à coordonnées rationnelles

(ii) $t = \tan(\frac{\theta}{2})$ est un nombre rationnel

(iii) M est à coordonnées rationnelles, c'est-à-dire $M \in \Delta$

c) (★) Montrer que tout point de Γ est limite de points de Δ (on dit que Δ est dense dans Γ).

13) (X) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application de classe C^2.

a) On suppose que $f(x) = \mathfrak{o}(1)$ pour $|x| \to +\infty$. Montrer que f' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

b) On suppose qu'il existe $A \in \mathbb{R}$ et $\delta > 0$ tels que $\forall x \geq A$, $|f'(x)| \geq \delta$.

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $|f(x)| \geq \lambda x$ au voisinage de $+\infty$ (c'est-à-dire pour x assez grand).

Proposer sans justification un énoncé analogue en $-\infty$.

c) (★) On suppose que $f(x) = \mathfrak{o}(|x|)$ pour $|x| \to +\infty$. Montrer que f'' s'annule au moins une fois sur $\mathbb{R}$.

Indication : Raisonner par l'absurde et utiliser b).

14) a) Soit $u \in \mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie, tel que $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg} u^2$. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{rg} u^p = \operatorname{rg} u$.

b) (*ENS*) En considérant $\operatorname{rg} A$, montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

15) (*X-ESPCI*) (★) Soit A un ensemble fini de réels de cardinal $n \geq 2$. On pose $X = A + A = \{a+b,\, (a,b) \in A^2\}$.

a) Montrer que $2n - 1 \leq \operatorname{card} X \leq \frac{1}{2}n(n+1)$.

b) Donner un exemple où $\operatorname{card} X = \frac{1}{2}n(n+1)$.

Suggestion : Exploiter l'unicité de l'écriture d'un entier naturel en base 2.

16) Soit $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$. On considère

$$Y_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{2^k}$$

a) Déterminer (sans calcul !) la loi de Y_n.

b) Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue par morceaux. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} E(f(Y_n))$.

17) (*X-ESPCI*) Soit $f :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ de classe C^1 telle que $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f'(x)}{f(x)} = L$, avec $L < 0$.

a) Donner un exemple d'une telle fonction.

b) Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} f(n)$ converge.

c) (★★) On pose $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} f(k)$. Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{1 - e^L} f(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

18) (*X MP*) (★) Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$ de dimension finie $n \geq 1$.

Remarque : F n'admet pas nécessairement de base composée de monômes X^k.

Par exemple, $F = \operatorname{Vect}(X^2 + 1, X^4 + 1) = \operatorname{Vect}(X^4 - X^2, X^4 + 1)$.

a) Montrer qu'il existe une base de F formée de polynômes de même degré.

b) Montrer qu'il existe une base de F formée de polynômes de degrés deux à deux distincts.

19) (*X-EXPCI*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1 < x_2 < ... < x_n$ des réels distincts classés par ordre croissant.

a) ($\bigstar$) Montrer que $A = \left\{ x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, ..., x_n\} \mid \sum_{k=1}^n \dfrac{1}{x - x_k} \geq 1 \right\}$ est une réunion finie d'intervalles disjoints.

b) ($\bigstar$) On note S la somme de leurs longueurs en utilisant les relations entre coefficients et racines d'un polynôme.

Montrer que $S = n$.

Indication : Noter que $f(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)}$ où $P(x) = \prod_{k=1}^n (x - x_k)$. En effet, $\ln |P(x)| = \sum_{k=1}^n \ln |x - x_k|$.

20) (*extrait ENS*) ($\bigstar$) Soit $n = 2m + 1$ un entier naturel impair. Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sin(nx) = n(\sin x) \prod_{k=1}^{m} \left(1 - \frac{(\sin x)^2}{\sin(k\pi/n)^2}\right)$$

21) (*Centrale*) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. On pose $M = \sup_{[0,1]} |f|$.

Soit $(Z_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $X_n = \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^n Z_k$

a) Soit $\varepsilon > 0$. Soient $x_0 \in [0, 1]$ et X une v.a. à valeurs dans $[0, 1]$.

On considère l'événement $A : |f(X) - f(x_0)| \leq \varepsilon$. Montrer que $|E(f(X)) - f(x_0)| \leq \varepsilon + 2M \ P(\overline{A})$.

b) Déterminer $\lim_{n \to +\infty} E(f(X_n))$.

22) (*X-ESPCI*) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de réels positifs.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + ... + \sqrt{a_n}}}$.

Remarque : On pourra noter $u_n(a_1, a_2, ..., a_n)$ lorsqu'on considère u_n comme fonction des a_k.

a) On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = 1$. Déterminer $L = \lim_{n \to +\infty} u_n$.

b) Soit $\lambda > 0$. On suppose que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \lambda^{(2^n)}$. Déterminer $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

c) ($\bigstar$) On suppose $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $a_n \geq 1$. Montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ssi $\ln a_n = O(2^n)$.