

TD Oaux (préparation 7 et 7 bis). **Corrigé**

1) A est symétrique donc diagonalisable. De plus, $\text{rg } A = 2$ car $\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix} \neq 0$, donc $\dim E_0 = 2n - 2$.

Première méthode :

On cherche donc les valeurs propres λ non nulles. Supposons $AX = \lambda X$, avec $\lambda \neq 0$ et $X \neq 0$.

On obtient la CNS : $\begin{cases} nax_0 + nbx_1 = \lambda x_0 \\ nbx_0 + nax_1 = \lambda x_1 \end{cases}$ avec $x_0 = x_2 = x_4 = \dots$ et $x_1 = x_3 = x_5 = \dots$

Les valeurs propres non nulles de la matrice $\begin{pmatrix} na & nb \\ nb & na \end{pmatrix}$ sont $n(a+b)$ et $n(a-b)$.

Donc $\text{Sp}(A) = \{n(a+b), n(a-b), 0\}$ (si $n > 2$).

Remarque : On a alors $E_{n(a+b)} = \mathbb{R}(1, 1, 1, \dots, 1)$ et $E_{n(a-b)} = \mathbb{R}(1, -1, 1, \dots, -1)$.

Seconde méthode (plus technique) : Posons $Y_0 = (1, 0, 1, 0, 1, \dots, 0)$ et $Y_1 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, \dots, 1)$.

On a $\det(xI_{2n} - A) = \det(xE_1 + aY_0 + bY_1, xE_2 + bY_0 + aY_1, \dots, xE_{2n} + bY_0 + aY_1)$.

En développant par $2n$ -linéarité, il ne reste que les monômes en x de degré $2n - 2$, $2n - 1$ et $2n$.

En effet, tout déterminant contenant deux Y_0 ou deux Y_1 sont nuls. De plus, $\text{tr } A = 2na$.

D'où $\det(xI_{2n} - A) = x^{2n} - 2nax^{2n-1} + \beta_n x^{2n-2}$, avec $\beta_n = ab \sum_{(i,j)} \det(E_1, \dots, E_{i-1}, Y_0, \dots, E_{j-1}, Y_1, \dots, E_n)$.

Or, on a $\det(E_1, \dots, E_{i-1}, Y_0, \dots, E_{j-1}, Y_1, \dots, E_n) = 1$ lorsque i pair et j impair, et 0 sinon

(on peut retrancher à Y_0 et Y_1 des E_k , avec $k \notin \{i, j\}$, ce qui permet de se ramener à $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$).

On obtient donc $\beta_n = (a^2 - b^2) \text{card}\{(i, j) \mid i \text{ pair et } j \text{ impair}\} = n^2(a^2 - b^2)$.

Donc $\chi_A(x) = x^{2n} - 2nax^{2n-1} + n^2(a^2 - b^2)x^{2n}$ ce qui permet de conclure.

2) *Première méthode :* On cherche les sev propres de M .

On a $M \left(\frac{X}{Y} \right) = \lambda \left(\frac{X}{Y} \right)$ ssi $\begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda Y \end{cases}$ ssi $\begin{cases} Y = \lambda X \\ AX = \lambda^2 X \end{cases}$

On note que (X, Y) est non nul ssi X est non nul.

On en déduit que λ est valeur propre de M ssi $\mu = \lambda^2$ est valeur propre de A .

De plus, $\text{Ker}(M - \lambda I_{2n}) = \left\{ \left(\frac{X}{\lambda X} \right) \mid X \in \text{Ker}(A - \lambda^2 I_n) \right\}$.

L'application $X \mapsto \left(\frac{X}{\lambda X} \right)$ est ainsi un isomorphisme de $\text{Ker}(A - \lambda^2 I_n)$ sur $\text{Ker}(M - \lambda I_{2n})$.

Chaque $\mu \in \mathbb{C}^*$ non nul admet deux racines carrées (opposées) distinctes λ et $-\lambda$.

On en conclut alors que $\sum_{\lambda} \text{Ker}(M - \lambda I_{2n}) = 2 \sum_{\mu} \text{Ker}(A - \mu I_n) - \dim \text{Ker } A$.

D'où la CNS : M diagonalisable ssi A diagonalisable et $\dim \text{Ker } A = 0$.

En effet, $\sum_{\lambda} \text{Ker}(M - \lambda I_{2n}) = 2n$ ssi $\sum_{\mu} \text{Ker}(A - \mu I_n) = n$ et $\dim \text{Ker } A = 0$.

Deuxième méthode : Supposons M diagonalisable. Alors $M^2 = \left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline O_n & A \end{array} \right)$ diagonalisable.

Donc A diagonalisable.

Réciproquement, supposons A diagonalisable : $P^{-1}AP = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = D$.

Alors M est semblable à $Q^{-1}MQ = \left(\begin{array}{c|c} O_n & I_n \\ \hline D & O_n \end{array} \right)$, avec $Q = \left(\begin{array}{c|c} P & O_n \\ \hline O_n & P \end{array} \right)$.

En changeant l'ordre des vecteurs de la base, on obtient M semblable à la matrice diagonale par blocs d'ordre 2,

où les blocs sont respectivement $B_j = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \lambda_j & 0 \end{pmatrix}$.

On a alors M diagonalisable ssi les n blocs sont diagonalisables, donc ssi les λ_j sont non nuls.

Autre approche : On a $M^{2k} = \left(\begin{array}{c|c} A^k & O_n \\ \hline O_n & A^k \end{array} \right)$ et $M^{2k+1} = \left(\begin{array}{c|c} O_n & A^k \\ \hline A^{k+1} & O_n \end{array} \right)$.

On a alors $P(A) = O_n$ ssi $P(M^2) = O_n$. Si $P(X) = \prod_{k=1}^n (X - \lambda_k)$, alors $P(X^2) = \prod_{k=1}^n (X^2 - \lambda_k)$.

Donc $P(X^2)$ est scindé à racines simples ssi P est scindé à racines simples et les λ_k non nul.

Ce qui permet de conclure.

4) a) - On utilise le théorème de continuité des intégrales paramétrées :

avec $g(t, x) = \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}}$ et $a > 0$, on a $\forall x \in [a, +\infty[$, $g(t, x) \leq g(t, a) = \varphi(t)$ et φ intégrable sur $]0, +\infty[$.

- On a $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}} dt = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{1+u/x}} du = \frac{1}{\sqrt{x}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{x+u}} du$.

On utilise alors la propriété de convergence dominée pour un paramètre continu :

D'une part, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{1+u/x}} du = \int_0^{+\infty} e^{-u} du = 1$, donc $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x}$.

D'autre part, on a $\lim_{x \rightarrow 0} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{x+u}} du = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}} du = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$, donc $f(x) \sim_{+\infty} \sqrt{\frac{\pi}{x}}$.

b) Pour prouver que l'intégrale existe et utilise les théorèmes sur les intégrales paramétrées, il faut se ramener à des fonctions intégrables (= intégrales absolument convergentes).

Par IPP, on a $f(x) = \frac{1}{x} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{(1+t)^2} dt$. On conclut avec la fonction de domination $\varphi(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$.

On peut trouver un équivalent en $+\infty$ avec des IPP :

On a $f(x) = \frac{1}{x^2} \left[-\frac{\cos(tx)}{(1+t)^2} \right]_0^{+\infty} - \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{2 \cos(tx)}{(1+t)^3} dt = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^2} \int_0^{+\infty} \frac{2 \cos(tx)}{(1+t)^3} dt$.

Par une nouvelle IPP, on montre que $\int_0^{+\infty} \frac{2 \cos(tx)}{(1+t)^3} dt = O_{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$, d'où $f(x) \sim_{+\infty} \frac{1}{x^2}$.

5) $\inf_{X \in \mathbb{R}^n} \|AX - B\|$ est la distance de B à $\text{Im } A = \{AX, X \in \mathbb{R}^p\}$.

Il est atteint en l'unique point $Y \in \text{Im } A$, projeté orthogonal de B sur $\text{Im } A$.

Donc $\|AX_0 - B\| = \inf_{X \in \mathbb{R}^n} \|AX - B\|$ ssi $AX_0 = Y$.

Or, $AX_0 = Y$ ssi $(AX_0 - B) \in (\text{Im } A)^\perp$ donc ssi $\forall j, (A_j | AX_0 - B) = 0$, donc ssi $A^T(AX_0 - B) = 0$.

Remarque : De façon générale, on a $(\text{Im } A)^\perp = \text{Ker } A^T$.

6) a) On vérifie aisément que f est de classe C^2 (on est ici sur un segment, donc on peut reproduire le cas général

en considérant $\varphi(\theta) = \sup_{(x,\theta) \in [a,b] \times [0,\pi/2]} \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \theta) \right|$.

En fait, ici, il est aisé de voir que $\varphi(\theta) = \rho^2$ convient pour majorer $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, \theta)$ pour tout $x \in [-\rho, \rho]$.

On a alors : $xf''(x) + xf(x) = \int_0^{\pi/2} x(\sin \theta)^2 \cos(x \cos \theta) d\theta$.

Une primitive de $x(\sin \theta)^2 \cos(x \cos \theta)$ est $-(\sin \theta) \sin(x \cos \theta)$.

Donc par IPP, on a $xf''(x) + xf(x) = [-(\sin \theta) \sin(x \cos \theta)]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (\cos \theta) \sin(x \cos \theta) d\theta = -f'(x)$.

b) On a $\cos(x \cos \theta) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x \cos \theta)^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(\cos \theta)^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$.

On a $\int_0^{\pi/2} \frac{(\cos \theta)^{2n}}{(2n)!} |x|^{2n} d\theta \leq \frac{\pi x^{2n}}{2(2n)!}$. La série $\sum \frac{\pi x^{2n}}{2(2n)!}$ converge.

Par ITT, on a donc $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos \theta)^{2n}}{(2n)!} |x|^{2n} d\theta = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^{2n}$, où $a_n = \int_0^{\pi/2} \frac{(\cos \theta)^{2n}}{(2n)!} d\theta$.

La fonction f est DSE en 0, de rayon $R = +\infty$.

c) On a $\int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta = \int_0^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt$, avec $\theta = \arccos t$. On a $d\theta = -\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$.

Pour évaluer l'intégrale, l'idée est de couper au voisinage de 1.

- On a d'une part $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt = \left[\frac{\sin(xt)}{x\sqrt{1-t^2}} \right]_0^{1-\varepsilon} - \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\sin(xt)}{x} \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} dt$.

On a donc $\left| \int_0^{1-\varepsilon} \frac{\sin(xt)}{x} \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} dt \right| \leq \frac{1}{x} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{t}{(1-t^2)^{3/2}} dt \leq \frac{1}{x\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2}} = \frac{1}{x\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}$.

On a donc $\int_0^{1-\varepsilon} \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \frac{1}{x\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}$.

- On a d'autre part $\int_{1-\varepsilon}^1 \frac{\cos(xt)}{\sqrt{1-t^2}} dt \leq \int_{1-\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} dt = \frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\varepsilon)$.

- On en déduit $f(x) \leq \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\varepsilon) \right) + \frac{1}{x\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}}$.

On a $\sin \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\varepsilon) \right) = \cos(\arcsin(1-\varepsilon)) = \sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} = \sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2}$.

Comme $\sin u \sim u$ en $u = 0$, alors $\frac{\pi}{2} - \arcsin(1-\varepsilon) \sim \sqrt{2\varepsilon}$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

On prend alors $\varepsilon = \frac{1}{x}$ (avec $x > 1$). On obtient $f(x) = O_{+\infty} \left(\frac{1}{x} \right)$.

7) a) On prend $A > 1$. $|f|$ atteint son maximum sur $[0, A]$ en un point x_0 .

On a $\frac{x_0}{2}$ et $\frac{x_0+1}{2} \in [0, a]$, donc $|f(x_0)| = \frac{1}{4} \left| f\left(\frac{x_0}{2}\right) + f\left(\frac{x_0+1}{2}\right) \right| \leq \frac{1}{4} |f(x_0)|$, donc $f(x_0) = 0$.

Donc f est nulle sur tout segment $[0, A]$, avec $A \geq 1$, donc sur $[0, +\infty[$.

b) On prend $0 \leq a < 1$. Alors $|f|$ atteint son maximum sur $[0, a]$ en un point x_0 .

On a $(x_0)^n \in [0, a]$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, donc $|f(x_0)| = \left| \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x_0^n)}{2^n} \right| \leq \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{|f(x_0)|}{2^n} = |f(x_0)|$,

avec égalité ssi $f(x_0^n) = f(x_0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Par continuité, $f(0) = f(x_0)$.

Donc f est constante sur $[0, a]$, donc sur $[0, 1[$, et par continuité sur $[0, 1]$. Réciproque immédiate.

8) Posons $A = D + N$, avec D diagonalisable et N nilpotente.

Il s'agit de prouver que D et N sont entièrement définies par A .

On note que A et N commutent avec D , donc les sev propres de D sont stables par A et N .

En se plaçant dans une base adaptée à la somme des sev propres, on obtient :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}} d = \begin{pmatrix} \lambda_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_p I \end{pmatrix}, \text{Mat}_{\mathcal{B}} n = \begin{pmatrix} N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & N_p \end{pmatrix} \text{Mat}_{\mathcal{B}} a = \begin{pmatrix} N_1 + \lambda_1 I & & \\ & \ddots & \\ & & N_p + \lambda_p I \end{pmatrix}$$

avec $N_1, \dots, N_p$ nilpotentes. Donc le sev propre $E_{\lambda_j} = \text{Ker}((a - \lambda_j \text{Id})^n)$, et les E_{λ} sont définis par A .

Donc D est entièrement défini par A , et $N = A - D$ aussi. D'où l'unicité de (D, N)

9) On peut noter que $f(z^n) = f(z)^n$, ce qui prouve en particulier que $f(U_n) \subset U_n$.

Ainsi, pour tout $\omega_n = e^{2i\pi/n}$, il existe $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ tel que $f(\omega_n) = \omega_n^k$.

On prend désormais les $n = 2^p$, où $p \in \mathbb{N}$. On a $f(\omega_{(2^p)}) = (\omega_{(2^p)})^{k_p}$, où $k_p \in \llbracket -2^{p-1}, 2^{p-1} - 1 \rrbracket$.

Remarque : On prend l'intervalle entier $\llbracket -2^{p-1}, 2^{p-1} - 1 \rrbracket$ au lieu de $\llbracket 0, 2^p - 1 \rrbracket$ vu la suite.

Comme $\omega_{(2^{p+1})}^2 = \omega_{(2^p)}$, alors $f(\omega_{(2^{p+1})})^2 = f(\omega_{(2^p)})$, donc $2 \times \frac{k_{p+1}}{2^{p+1}} \times 2\pi \equiv \frac{k_p}{2^p} \times 2\pi \pmod{2\pi}$.

Donc $k_{p+1} = k_p$ ou bien $k_{p+1} = k_p + 2^p$.

Or, f est continue sur U et $f(1) = 1$.

Aors il existe un voisinage V de 1 tel que $\forall \theta \in V$, $f(e^{i\theta})$ appartient au demi-cercle Δ défini par les nombre complexes de module 1 dont l'argument est strictement compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$.

Or, pour p assez grand, $\omega_{(2^p)} \in \Delta$, d'où $k_{p+1} = k_p$ pour p assez grand.

Ainsi, $(k_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est stationnaire de valeur $m \in \mathbb{N}$.

On a ainsi $f(e^{i\theta}) = e^{im\theta} = (e^{i\theta})^m$ pour tout $\theta \in \left\{ \frac{2\pi}{2^p}, p \in \mathbb{N} \right\}$.

Ainsi, $f(z) = z^m$ pour tout $z \in A = \left\{ \frac{2\pi k}{2^p}, (p, k) \in \mathbb{N}^2 \right\}$.

Comme A est dense dans $\mathbb{R}$, alors par continuité de f et de $\exp$, on a $f(z) = z^m$ pour tout $z \in U$.

La réciproque est immédiate. Donc les solutions sont les $f : z \mapsto z^m$, avec $m \in \mathbb{Z}$.

Autre preuve : On considère $g(x) = f(e^{ix}) \in U$. On a donc g continue et $g(x+y) = g(x)g(y)$.

En intégrant par rapport à x , on a $G(x+y) - G(y) = G(x)g(y)$, où $G(x) = \int_0^x g$.

Comme $G(0) = 1$, alors on peut trouver $\varepsilon > 0$ assez petit tel que $G(\varepsilon) \neq 0$.

Donc $g(y) = \frac{G(x+y) - G(y)}{G(x)}$, et ainsi g est de classe C^1 .

En dérivant $g(x+y) = g(x)g(y)$ par rapport à x , on obtient $g'(x+y) = g'(x)g(y)$.

Donc $g'(y) = g'(0)g(y)$, d'où $g(x) = A \exp(\lambda x)$, avec $A = 1$ car $g(0) = 1$.

On a nécessairement $\lambda = im \in i\mathbb{Z}$, car $g(2\pi) = \exp(2\pi ix)$, c'est-à-dire $f(z) = z^m$.