

TD Orlaux (préparation 7 et 7 bis)

1) On considère $A = \begin{pmatrix} a & b & a & \dots \\ b & a & b & \\ a & b & a & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$, avec $|a| \neq |b|$. Déterminer le spectre de A .

2) On considère $M = \left(\begin{array}{c|c} O_n & I_n \\ \hline A & O_n \end{array} \right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$.

Montrer que M diagonalisable ssi A diagonalisable et inversible.

3) On considère $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-n^2 x^2}$.

a) Montrer que f est de classe C^1 sur $]0 + \infty[$.

b) Déterminer un équivalent de f en 0^+ et en $+\infty$.

4) *Les deux questions sont indépendantes*

a) On considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{\sqrt{1+t}} dt$.

Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$, et déterminer un équivalent de f en $+\infty$ et en 0 .

b) On considère $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(tx)}{1+t} dt$.

Montrer que f est continue sur $]0, +\infty[$, et déterminer un équivalent de f en $+\infty$.

5) Soient $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathbb{R}^n$ muni de la norme euclidienne.

Soit $X_0 \in \mathbb{R}^p$. Montrer que $\|AX_0 - B\| = \inf_{X \in \mathbb{R}^p} \|AX - B\|$ ssi $A^T AX_0 = A^T B$.

6) On considère $f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x \cos \theta) d\theta$.

a) Montrer que f est de classe C^2 , et vérifie l'équation de Bessel : $xf''(x) + f'(x) + xf(x) = 0$.

b) Montrer que f est DSE en 0 .

c) (★★) Montrer que $f(x) = O_{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

7) (★) *Les deux questions sont indépendantes*

a) Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4f(x)$$

b) Déterminer les fonctions continues $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ telles que $\forall x \in [0, 1], f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{f(x^n)}{2^n}$.

8) (★★) Soient $D, N, D', N' \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ telles que $D + N = D' + N'$,

On suppose que D et D' diagonalisables, N et N' nilpotentes, $DN = ND$ et $D'N' = N'D'$.

Montrer que $D = D'$ et $N = N'$.

9) (★★) Déterminer les applications continues $f : U \rightarrow U$ telles que $f(zz') = f(z)f(z')$.