

TD Orlaux (préparation 6). **Corrigé**

1) a) Par récurrence, on obtient $f_n(x) = M \frac{x^n}{n!}$. Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x) = M \exp(x)$.

b) On montre par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, A], |f_n(x)| \leq M_A \frac{x^n}{n!}$.

En particulier, $\sup_{x \in [0, A]} |f_n(x)| \leq M_A \frac{A^n}{n!}$. Comme $\sum \frac{A^n}{n!}$ converge, alors $\sum f_n$ converge normalement (donc uniformément) sur le segment $[0, A]$.

On en déduit que $\sum f_n$ converge vers une fonction continue $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

On a aussi par convergence normale $\int_0^x S(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} f_{n+1}(x) = S(x) - g(x)$.

Ainsi, $S(x) = g(x) + \int_0^x S(t) dt$.

L'application $F : x \mapsto \int_0^x S(t) dx$ vérifie donc $F'(x) = g(x) + F(x)$.

Par la méthode de variation de la constante, on obtient $F(x) = \lambda e^x + e^x \int_0^x g(t) e^{-t} dt$.

Comme $F(0) = 0$, alors $F(x) = e^x \int_0^x g(t) e^{-t} dt$. Donc $S(x) = g(x) + e^x \int_0^x g(t) e^{-t} dt$.

1) bis) On pourrait se ramener au a) en posant $f_n(x) = S_n(x) - S_{n-1}(x)$, avec $S_{-1}(x) = 0$.

En fait, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ssi la série $\sum f_n$ converge, et on a alors $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$.

Mais il vaut mieux procéder autrement : on peut noter que si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur tout segment vers une fonction S , alors on a par passage à la limite (vu les ths du cours) que S est continue (car les S_n le sont par récurrence) et que $S(x) = g(x) + \int_0^x S(t) dt$.

On calcule donc l'unique solution de cette équation intégrale, et il reste à prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = S(x)$.

On a $S(x) - S_n(x) = \int_0^x S(t) dt - S_{n-1}(t) dt$.

On en déduit par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, |S(x) - S_n(x)| \leq M_x \frac{x^n}{n!}$, où $M_x = \sup_{[0, x]} |S - S_0|$.

En particulier, pour tout $A \geq 0$, $\sup_{x \in [0, A]} |S(x) - S_n(x)| \leq M_a \frac{A^n}{n!}$.

Donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers S uniformément sur tout segment $[0, A]$.

1) ter) En fait, on va procéder par la même principe qu'au 1) bis). On a ici $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$f_0 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \forall x \geq 0, f_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x \sqrt{f_n(t)} dt$$

Autrement dit, $f_0 = 1$ et $f_{n+1} = \phi(f_n)$, où $\phi : C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}^+) \rightarrow C^1([0, +\infty[, \mathbb{R}^+)$ est définie par

$$\phi(f) : x \mapsto 1 + \int_0^x \sqrt{f(t)} dt$$

- On peut se douter que si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $f = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n$ est un **point fixe** de ϕ .

Il suffit en effet de passer à la limite dans la relation, ce qui est possible par exemple si on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, x]$.

$\phi(f) = f$ équivaut à $f(0) = 1$ et $f' = \sqrt{f}$, ce qui s'écrit $\frac{f'}{\sqrt{f}} = 1$, d'où $2\sqrt{f} = x + 2$.

On a donc $f : x \mapsto \frac{(x+2)^2}{4}$ est un point fixe.

- *Première propriété* (non indispensable en fait) : ϕ est croissante, c'est-à-dire : $f \leq g \Rightarrow \phi(f) \leq \phi(g)$.

On en déduit que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. En effet, on a $f_0(x) = 1 \leq f_1(x) = 1 + x$.

En composant par ϕ , on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f_{n+1}$, c'est-à-dire $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croissante. En particulier, $f_n \geq 1$.

On a aussi $f_0 \leq f$ (point fixe), donc en composant par ϕ , on obtient $\forall n \in \mathbb{N}, f_n \leq f$.

Ainsi, on montre la convergence de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ car pour tout x , $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée (par $f(x)$).

Mais on ne sait pas encore si $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$, car il faudrait prouver la cv uniforme locale.

- *Deuxième propriété* : on va donc essayer d'évaluer $f(x) - f_n(x)$.

On a $f(x) - f_{n+1}(x) = \int_0^x \left(\sqrt{f(t)} - \sqrt{f_n(t)} \right) dt$

Remarque : il est essentiel de comparer des choses comparables :

c'est pourquoi, on utilise $f - f_{n+1} = \phi(f) - \phi(f_n)$ et non pas $f - f_{n+1} = f - \phi(f_n)$.

Pour majorer l'écart entre deux racines carrées, on utilise soit l'expression conjuguée, soit l'IAF :

$|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| = \frac{\alpha - \beta}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$ ou bien $|\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}| \leq |\alpha - \beta| \sup_{[\alpha, \beta]} |\varphi'|$, où $\varphi' : t \mapsto \sqrt{t}$.

On obtient finalement $|f(x) - f_{n+1}(x)| \leq \int_0^x \left(\frac{f(t) - f_n(t)}{\sqrt{f(t)} + \sqrt{f_n(t)}} \right) dt$.

Donc $\sup_{[0, A]} |f - f_{n+1}| \leq \sup_{[0, A]} |f - f_n| \int_0^A \frac{dt}{1 + \sqrt{f(t)}}$.

En particulier, $\sup_{[0, A]} |f - f_{n+1}| \leq \frac{A}{2} \sup_{[0, A]} |f - f_n|$.

En prenant $A = 1$, on obtient $\sup_{[0, 1]} |f - f_n| = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$. Donc $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 1]$.

- *Troisième propriété* : Ensuite, on va exploiter la convergence uniforme sur $[0, 1]$ pour prouver la convergence uniforme sur $[0, 2]$.

En effet, posons $\varepsilon_n = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x) - f_{n+1}(x)|$ et $R_n = \sup_{[0, 2]} |f(x) - f_{n+1}(x)|$.

En reprenant les majorations précédentes, on obtient $R_{n+1} \leq \varepsilon_n + \frac{1}{2}R_n$.

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq n_0$ assez grand, on a $R_{n+1} \leq \varepsilon + \frac{1}{2}R_n$.

D'où $R_n \leq \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^n}\right) + \frac{1}{2^n}R_0 \leq 2\varepsilon + \frac{1}{2^n}R_0$, donc $R_n \leq 3\varepsilon$ pour n assez grand.

Variante : $R_n \leq u_n$, où $u_0 = R_0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \varepsilon + \frac{1}{2}u_n$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 2ε (point fixe de $z \mapsto \varepsilon + \frac{1}{2}z$), donc $R_n \leq u_n \leq 3\varepsilon$ pour n assez grand.

On en conclut que $\lim_{n \rightarrow +\infty} R_n = 0$, et que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $[0, 2]$.

En itérant la procédé, on montre par récurrence sur $A \in \mathbb{N}$ qu'il y a cv unif sur tout $[0, A]$.

2) Supposons que $P(z) = 0$, avec $|z| > \varepsilon$. On a ainsi $a_n z^n = -\sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k$.

D'où $1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^{n-k}} < \sum_{k=0}^{n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \frac{1}{\varepsilon^{n-k}}$.

Autrement dit, si $\sum_{k=0}^{n-1} \alpha \frac{1}{\varepsilon^{n-k}} \leq 1$, alors les racines de P sont toutes de module $|\lambda| \leq \varepsilon$.

En conclusion, on peut prendre $\alpha = \frac{\varepsilon^n}{\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon^k}$.

2) bis) On note que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\deg P_n = d$.

Plus précisément, si $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n(X) = \sum_{k=0}^n n^k a_k X^k$.

On a ainsi $\frac{1}{n^d a_d} P_n(X) = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} \left(\frac{k}{d}\right)^n \frac{a_k}{a_d} X^k$ qui converge vers X^d .

On va prouver que les racines de (P_n) converge vers les racines de X^d , c'est-à-dire vers 0.

Soit $\varepsilon > 0$. Il s'agit de prouver que $\rho_n \leq \varepsilon$ pour n assez grand.

Si z est racine de P_n vérifiant $|z| > \varepsilon$, alors $1 \leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{d}\right)^n \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{|z|^{n-k}} < \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{d}\right)^n \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{\varepsilon^{n-k}}$.

Or, pour $n \geq n_0$ assez grand, $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{d}\right)^n \left|\frac{a_k}{a_n}\right| \frac{1}{\varepsilon^{n-k}} < 1$, car le terme tend vers 0.

Donc on a bien $\forall n \geq n_0$, $\rho_n \leq \varepsilon$.

3) a) On a $(X | AX) = (A^T X | X) = -(X | AX)$, donc $(X | AX) = 0$.

Si $AX = \lambda X$, on obtient $\lambda \|X\|^2 = 0$. Donc la seule valeur propre réelle possible est $\lambda = 0$.

Remarque : Si n impair, 0 est valeur propre (car χ_A admet au moins une racine réelle).

b) On a $A^2 = -A^T A \in S_n^-(\mathbb{R})$, donc A^2 est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et $\text{Sp}(A^2) \subset \mathbb{R}^-$.

Or, les valeurs propres de A^2 sur $\mathbb{C}$ sont les carrés des valeurs propres de A (cf trigonalisation).

Donc sur $\mathbb{C}$, $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

c) Posons $\lambda = i\mu$, avec μ réel non nul.

On a $AZ = i\mu Z$, d'où par identification des parties réelles et imaginaires, $AX = -\mu Y$ et $AY = \mu X$.

D'où $\mu(X | Y) = -(X | AX) = 0$ par a). Comme μ non nul, $(X | Y) = 0$.

4) a) Première méthode : On procède par combinatoire : on cherche le nombre de permutations telle que le cycle passant par 1 est de longueur k .

Pour construire une telle permutation, on choisit le cycle (ce qui revient à permuter les éléments du cycle distincts de 1), puis on compte le nombre de cycles associés, puis on complète avec une permutation sur les éléments restants.

On a donc $P(X_1 = k) = \frac{\binom{n}{k} (k-1)! (n-k)!}{n!} = \frac{1}{n}$. Donc X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

Seconde méthode : On a $P(X_1 = k) = P(A_1 \cap \dots \cap A_{k-1})$ où A_j est l'événement : “ $\sigma^j(1) \neq 1$ ” et B l'événement : “ $\sigma^k(1) = 1$ ”. On utilise alors la formule de l'intersection :

On a $P(A_1) = \frac{n-1}{n}$, et $P(A_j | A_1 \cap \dots \cap A_{j-1}) = \frac{n-j}{n-j+1}$ et $P(B | A_1 \cap \dots \cap A_{k-1}) = \frac{1}{n-k}$.

Donc $P(X_1 = k) = \left(\prod_{j=1}^k \frac{n-j}{n-j+1} \right) \times \frac{1}{n-k} = \frac{1}{n}$, d'où X_1 suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

b) On note que $Y = \sum_{j=1}^n \frac{1}{X_j}$, donc $E(Y) = \sum_{j=1}^n E\left(\frac{1}{X_j}\right)$.

Donc $E(Y) = nE\left(\frac{1}{X_1}\right)$, car les points jouent un rôle symétrique.

Or, par transfert, $E\left(\frac{1}{X_1}\right) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \frac{1}{n}$, donc finalement on obtient $E(Y) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

c) On a $Z_k = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^n 1_{X_i=k}$, donc $P(Z_k) = \frac{n}{k} P(X_1 = k) = \frac{1}{k}$.

5) a) Un produit fini d'ensembles dénombrable est dénombrable donc $\mathbb{Q} \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

A fortiori, Δ est dénombrable.

b) Il est évident que Ω contient l'union des boules $B(a, \varepsilon) \in \Delta$ qui sont incluses dans Ω .

Réciproquement, soit $x \in \Omega$. Comme Ω est ouvert, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(x, \varepsilon) \subset \Omega$.

Il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Comme $\mathbb{Q}^n$ est dense dans $\mathbb{R}^n$, il existe $a \in \mathbb{Q}^n$ tel que $\|x - a\| \leq \frac{1}{n}$.

On a alors (faire un schéma) $x \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$ et aussi $B\left(a, \frac{1}{n}\right) \subset \Omega$ (car $\frac{2}{n} \leq \varepsilon$).

On en déduit que Ω est incluse dans l'union des boules $B(a, \varepsilon) \in \Delta$ qui sont incluses dans Ω .