

TD Orlaux (préparation 6 et 6 bis)

1) On considère $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue.

On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie sur $[0, +\infty[$ par

$$f_0(x) = g(x) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt$$

a) Calculer $f_n(x)$ lorsque $g(x) = M$ constante. Que vaut $\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(x)$?

b) Montrer que la série de fonctions $\sum f_n$ converge vers une fonction S qu'on déterminera.

Indication : En utilisant a), majorer $|f_n(x)|$ sur tout segment $[0, A]$ en utilisant $M_A = \sup_{[0, A]} |g|$.

En déduire que $S = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n$ existe et est continue, et que $S(x) = g(x) + \int_0^x S_n(t) dt$.

1) **bis**) *Variante* : On considère $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ continue et la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$S_0(x) = g(x) \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, S_{n+1}(x) = g(x) + \int_0^x S_n(t) dt$$

Montrer que la suite de fonctions $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction S qu'on déterminera.

1) **ter**) (★) On considère la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe C^1 définie sur $[0, +\infty[$ par $f_0(x) = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, f'_{n+1}(x) = \sqrt{f_n(x)} \text{ et } f_n(0) = 1$$

Montrer que la suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers une fonction f qu'on déterminera.

2) Soit $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$ un polynôme de degré $n \geq 1$. En particulier, $a_n \neq 0$.

On pose $M(P) = \max_{0 \leq k \leq n-1} \left| \frac{a_k}{a_n} \right|$ et $\rho(P) = \max\{|z| \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } P(z) = 0\}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout P de degré n , $M(P) \leq \alpha \Rightarrow \rho(P) \leq \varepsilon$.

2) **bis**) (★) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ non nul. On pose $\rho(P) = \max\{|z| \mid z \in \mathbb{C} \text{ et } P(z) = 0\}$.

On considère la suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $P_0 = P$ et $P_{n+1} = X P'_n$.

Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho(P_n) = 0$.

3) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique.

a) Montrer que $\forall X \in \mathbb{R}^n$, $(X \mid AX) = 0$. Qu'en déduire sur les valeurs propres réelles de A ?

b) Montrer que sur $\mathbb{C}$, on a $\text{Sp}(A) \subset i\mathbb{R}$.

c) Soit $Z = X + iY \in \mathbb{C}^n$ un vecteur propre de A pour une valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ non nulle.

Montrer que X et Y sont orthogonaux (dans $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique).

4) (★) On considère l'ensemble des permutations σ de $\llbracket 1, n \rrbracket$ muni de la loi uniforme.

a) On note $X_1 = \text{card}\{\sigma^k(1), k \in \mathbb{N}\}$ la longueur du cycle de σ contenant 1.

Montrer que X_1 suit la loi uniforme.

b) En utilisant les $\frac{1}{X_j}$, déterminer l'espérance du nombre Y de cycles de σ .

c) Pour $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer l'espérance du nombre Z_k de cycles de longueur k .

5) (*culturel*) Soit Ω une partie ouverte de $\mathbb{R}^n$.

On note Δ l'ensemble des boules ouvertes $B(a, \varepsilon)$ de centre $a \in \mathbb{Q}^n$ et de rayon $\varepsilon \in \left\{ \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^* \right\}$.

a) Justifier que Δ est dénombrable.

b) Montrer que Ω est l'union des boules $B(a, \varepsilon) \in \Delta$ qui sont incluses dans Ω .