

TD Orlaux (préparation 5 bis, spécifique X-ENS). **Corrigé**

1) a) $Y = \sum_{k=1}^N 1_{A_k}$, où A_k : “ L’entier k a été tiré au moins une fois ”.

On a $P(A_k) = 1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n$. Donc $E(Y) = N \left(1 - \left(1 - \frac{1}{N}\right)^n\right)$.

b) On obtient respectivement $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} E(Y) = 1$, $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} E(Y) = 0$ et $\lim_{n=N \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} E(Y) = 1 - e^{-1}$.

2) On note X la valeur du jeton choisi par Alice. Ainsi, X suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$.

On a $P(Y \geq j \mid X = k) = \frac{\binom{k-1}{j-1}}{\binom{n}{j-1}}$. On a nécessairement $j \leq k$.

Donc $P(Y \geq j) = \sum_{k=j}^n P(Y \geq j \mid X = k) P(X = k) = \frac{1}{n} \sum_{k=j}^n \frac{\binom{k-1}{j-1}}{\binom{n}{j-1}}$.

Avec la formule de la crosse de Hockey, on obtient finalement $P(Y \geq j) = \frac{1}{n} \frac{\binom{n}{j}}{\binom{n}{j-1}} = \frac{n-j+1}{n \times j}$.

3) On note $x_1, \dots, x_{2n+1}$ les réels positifs, et $X = (x_j)_{0 \leq j \leq 2n}$.

Les conditions se ramènent à un système de $(2n+1)$ équations à $(2n+1)$ inconnues de la forme $AX = 0$, où A est $(a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ vérifie notamment $\forall i, a_{ii} = 0$ et $\forall i \neq j, a_{ij} \in \{-1, 1\}$.

Par ailleurs, sur chaque ligne, il y a autant de coefficients valant 1 que de coefficients valant -1 .

On note que le vecteur $Z = (1, \dots, 1)$ est solution (c’est-à-dire $Z \in \text{Ker } A$). Ainsi, $\dim \text{Ker } A \geq 1$.

L’énoncé revient à montrer que $\text{Ker } A = \mathbb{R}Z$.

Il suffit donc par dimension de prouver que $\dim \text{Ker } A = 1$, c’est-à-dire $\text{rg } A = 2n$.

On peut alors conclure avec l’exo 3) bis) : en effet, la sous-matrice principale d’ordre $2n$ admet un déterminant impair, donc est inversible, ce qui prouve que $\text{rg } A \geq 2n$, donc $\text{rg } A = 2n$.

3) bis) - $\det A$ est un polynôme en les a_{ij} à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Donc la parité de $\det A$ ne dépend que de la parité des a_{ij} . Par exemple, ab est pair ssi a ou b est pair.

- Il suffit donc de prouver la propriété lorsque $\forall i \neq j, a_{ij} = 1$.

On a alors $A = J - I_n$, où J est la matrice ne contenant que des 1.

On a J symétrique diagonalisable de rang 1 semblable à $\text{Diag}(n, 0, \dots, 0)$.

Donc A diagonalisable semblable à $\text{Diag}(n-1, -1, \dots, -1)$, d’où $\det A = (-1)^{n-1}(n-1)$.

D’où le résultat : si n est pair, alors $\det A$ est impair.

4) - On montre (cf annexe) la propriété :

Lemme : si $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$, alors $x_n(a_0, \dots, a_n) \leq x_n(b_0, \dots, b_n)$.

- En particulier, $x_{n+1}(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = x_n(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + \sqrt{a_{n+1}}) \geq x_n(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n)$.

Autrement dit, la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Donc elle converge ssi elle est majorée.

- Supposons qu’il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \lambda^{(2^n)}$.

On a alors (cf preuve en annexe) que $x_n \leq \lambda + \sqrt{\lambda^2 + \sqrt{\lambda^4 + \dots + \sqrt{\lambda^{(2^n)}}}} = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots + \sqrt{1}}}$.

Ainsi, $x_n \leq u_n$, et $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 1 + \sqrt{u_n}$.

La fonction $f : x \mapsto x + \sqrt{x}$ est croissante sur $[1, +\infty[$ et admet un unique point fixe $\lambda > 1$.

Ainsi, l'intervalle $[1, \lambda]$ est stable par f , et $f \geq \text{Id}$ sur cet intervalle.

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ croît et converge vers λ , unique point fixe de f sur $[1, \lambda]$. Donc $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée (et cv).

- Réciproquement, supposons $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergente. Alors il existe λ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, x_n \leq \lambda$.

A fortiori, $\sqrt[n]{a_n} \leq \lambda$, c'est-à-dire $a_n \leq \lambda^{(2^n)}$.

Annexe : Preuve du lemme : Supposons $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq b_n$. On raisonne par récurrence :

On a $x_{n+1}(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}) = x_n(a_0, \dots, a_{n-1}, a_n + \sqrt{a_{n+1}})$.

On a $a_n + \sqrt{a_{n+1}} \leq b_n + \sqrt{b_{n+1}}$. On obtient donc le résultat par récurrence sur n .

5) On note tout d'abord que f est 2π -périodique. Le nombre de zéros sur $[a, a + 2\pi[$ ne dépend pas de a .

On utilise alors les lemmes suivants :

- *Lemme* : Si g est C^1 et 2π -périodique s'annule n fois sur $[a, a + 2\pi[$, alors g' s'annule au moins $(n + 1)$ fois.

Preuve : Sur $[a, a + 2\pi]$, où a est un zéro de g : ainsi, g s'annule $(n + 1)$ fois sur $[a, a + 2\pi]$, donc par Rolle, g' s'annule au moins $(n + 1)$ fois sur $]a, a + 2\pi[$, donc a fortiori sur $[a, a + 2\pi[$.

Conséquence : $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante.

- *Lemme* : Si $a_n > \sum_{k=1}^{n-1} |a_k|$, alors f s'annule au moins $(2n)$ fois sur $[a, a + 2\pi[$

Preuve : Il existe $(2n + 1)$ points $a_0, a_1, \dots, a_{2n} = a_0 + 2\pi$ tels que $\sin(na_k + \varphi_k) = (-1)^k$.

On a alors $f(a_k)$ du signe de $(-1)^k$, donc par le TVI, f s'annule au moins $2n$ fois sur $]a, a + 2\pi[$.

Conséquence : On a $f^{(p)}$ de la forme $= \sum_{k=1}^n k^p a_k \sin(kt + \psi_k)$.

Pour p assez grand, $n^p a_n > \sum_{k=1}^{n-1} k^p |a_k|$, donc $N_p \geq 2n$ pour p assez grand.

- *Lemme* : Le polynôme trigonométrique f admet au plus $2n$ zéros

Preuve : On a $f(t)$ de la forme $\sum_{k=1}^n c_k e^{ikt} + \sum_{k=1}^n d_k e^{-ikt}$, avec c_k et $d_k \in \mathbb{C}$.

On a donc $f(t) = e^{-int} P(e^{it})$, avec P polynôme non nul de degré $\leq 2n$.

Comme P admet au plus $2n$ racines sur U , alors f admet au plus $2n$ zéros sur $[0, 2\pi]$.

6) - On note d'abord que le nombre de changements de signes de f est pair, car $f(0) = f(2\pi)$.

- On peut aussi noter que $f(t) = \cos(mt)$ vérifie l'hypothèse lorsqu'on prend $m \geq n + 1$.

En effet, on a par exemple $\int_0^{2\pi} \cos(mt) \cos(nt) dt = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos((m+n)t) + \cos((m-n)t) dt = 0$.

- On traite d'abord le cas $n = 0$. On a $\int_0^{2\pi} f(t) dt = 0$, donc f change de signe.

Donc f admet au moins deux zéros, cas atteint par exemple lorsque $f(t) = \cos t$.

- On traite ensuite le cas $n = 1$. On a $\int_0^{2\pi} f(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(t) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \sin(t) dt = 0$,

ce qui revient à $\int_0^{2\pi} f(t) \omega(t) dt = 0$, où $\omega(t) = A \cos(t - \varphi) - B$.

Supposons par l'absurde que f admet exactement 2 changements de signes en α et β .

Alors On peut écrire α et β sous la forme $\varphi - \varepsilon$ et $\varphi + \varepsilon$.

Ainsi, $\omega(t) = \cos(t - \varphi) - \cos \varepsilon$ change de signe en même temps que f .

Comme $\int_0^{2\pi} f(t) \omega(t) dt = 0$ et que $f\omega$ est de signe constant, alors $f(t)\omega(t) = 0$ pour tout t ,

donc f est identiquement nulle (par continuité), ce qui est absurde.

Donc f admet exactement 4 changements de signes, cas atteint par exemple lorsque $f(t) = \cos(2t)$.

- On procède alors par récurrence. Supposons que f admet $(2n)$ changements de signes en les points $\alpha_k = \varphi_k - \varepsilon_k$ et $\beta_k = \varphi_k + \varepsilon_k$, avec $1 \leq k \leq n$.

On considère $\omega(t) = \prod_{k=1}^n (\cos(t - \varphi_k) - \cos \varepsilon_k) \in \text{Vect}((\sin(kt))_{1 \leq k \leq n}, (\cos(kt))_{0 \leq k \leq n})$.

Les fonctions f et ω changent de signes en les mêmes points, d'où $f\omega$ de signe constant.

D'où une contradiction avec $\int_0^{2\pi} f\omega = 0$.

D'où f admet au moins $(2n + 2)$ zéros (où elle change de signe), cas atteint lorsque $f(t) = \cos((n + 1)t)$.

7) On suppose a, b, c distincts et le triangle non aplati.

On a $(z - a)$ et $(b - c)$ orthogonaux, c'est-à-dire $\frac{z - a}{b - c} \in i\mathbb{R}$, c'est-à-dire $\frac{z - a}{b - c} = \overline{\left(\frac{z - a}{b - c}\right)}$.

On obtient ainsi : $\frac{z - a}{b - c} = \overline{\left(\frac{z - a}{b - c}\right)}$ et $\frac{z - b}{a - c} = \overline{\left(\frac{z - b}{a - c}\right)}$.

Il s'agit d'un système linéaire de deux équations en les deux inconnues z et $\bar{z}$.

Le système est bien inversible car la matrice associée est $\begin{pmatrix} \frac{1}{b - c} & \overline{\left(\frac{1}{b - c}\right)} \\ \frac{1}{a - c} & \overline{\left(\frac{1}{a - c}\right)} \end{pmatrix}$.

Son déterminant est non nul, car $\overline{\left(\frac{b - c}{a - c}\right)} \neq \left(\frac{b - c}{a - c}\right)$.

En effet, comme a, b, c ne sont pas alignés, alors $\frac{b - c}{a - c} \notin \mathbb{R}$, c'est-à-dire $\overline{\left(\frac{b - c}{a - c}\right)} \neq \left(\frac{b - c}{a - c}\right)$.

8) Remarque : On a $\forall k, \frac{k}{n} \neq a$, car a est irrationnel.

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t - a}}$ est décroissante et intégrable sur $]a, a + 1]$.

Donc $\frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \leq \int_{(k-1)/n}^{k/n} f(t) dt$, si f est décroissante sur $\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$.

Notons $j = \min \left\{ k \in \mathbb{N} \mid a \leq \frac{k}{n} \leq a + 1 \right\}$.

On a alors $\frac{1}{n} \sum_{k \in A_n, k \neq j} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}} \leq \int_{j/n}^{a+1} \frac{1}{\sqrt{t - a}} dt \leq \int_a^{a+1} \frac{1}{\sqrt{t - a}} dt = 2$.

Donc $\frac{S_n}{n} \leq 2 + \frac{1}{n\sqrt{\frac{j}{n} - a}}$.

D'autre part, $\frac{j}{n} - \sqrt{2} = \frac{\left(\frac{j}{n}\right)^2 - 2}{\frac{j}{n} + \sqrt{2}} \geq \frac{1}{n^2} \frac{j^2 - 2n^2}{\frac{j}{n} + \sqrt{2}}$.

Or, $j^2 - 2n^2$ est un entier naturel non nul, donc $j^2 - 2n^2 \geq 1$. D'où $\frac{j^2 - 2n^2}{\frac{j}{n} + \sqrt{2}} \geq \frac{1}{2\sqrt{2} + 1}$.

On obtient donc $\frac{S_n}{n} \leq 2 + \frac{1}{\sqrt{2\sqrt{2}+1}}$.

9) a) On a $y'' = O(p)$, donc y'' intégrable. D'où a fortiori, y' converge en $+\infty$.

Posons $L = \lim_{n \rightarrow +\infty} y'$. Si on avait $L > 0$, alors $y'(x) \geq \frac{1}{2}L$ pour $x \geq x_0$ assez grand.

Donc $y(x) \geq y(x_0) + \frac{1}{2}L(x - x_0)$, ce qui contredit y bornée. De même si $L < 0$. Donc $L = 0$.

b) Supposons par l'absurde que y ne s'annule pas sur $[a, a + \pi]$.

Quitte à considérer $-y$, qui vérifie aussi la même équation, on peut supposer $y > 0$ sur $[a, a + \pi]$.

On considère $z(x) = \sin(x - a)$. Ainsi, $z'' + z = 0$.

On a $\left(\frac{z}{y}\right)' = \frac{z'y - zy'}{z^2}$ et $(z'y - zy')' = z''y - zy'' = (p(x) - 1)zy \geq 0$.

Donc $\frac{z}{y}$ est croissante. Comme $\frac{z}{y}$ s'annule en a et $a + \pi$, on a $\frac{z}{y} = 0$ sur $[a, a + \pi]$ ce qui est absurde.

10) On pose $z_k = a_k - ib_k$, avec $(a_k, b_k) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$.

On a $\arg(x - z_k) = -\frac{\pi}{2} + \arg(b_k + i(x - a_k)) = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{x - a_k}{b_k}\right) [2\pi]$.

Donc $\arg P(x) = \sum_{k=1}^n \arg(x - a_k) = \varphi + \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{x - a_k}{b_k}\right) [2\pi]$, où φ est une constante.

On vérifie aisément par calcul que $g(x) = \sum_{k=1}^n \arctan\left(\frac{x - a_k}{b_k}\right)$ est définie sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante de $]-\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2}[$. Donc l'équation $\arg P(x) = 0 [2\pi]$ admet n zéros distincts.

Autrement dit, Q admet n racines réelles distinctes.

11) On a $|S|^2 = \overline{S}S = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(k^2-l^2)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \omega^{(k-l)(k+l)}$.

Mais en fait, compte tenu de $\omega^n = 1$, on peut prendre $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k}^{k+n-1} \dots$ au lieu de $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=0}^{n-1} \dots$

Donc on a $|S|^2 = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{l=k}^{k+n-1} \omega^{(k-l)(k+l)} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j(2k+j)}$ en posant $j = l - k$.

On obtient alors $|S|^2 = \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-j^2} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{-2kj} \right)$.

Comme n est impair, $\omega^{-2j} = 1$ ssi $j = 0 [n]$, donc $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-2kj} = n$ si $j = 0$, et $\sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-2kj} = 0$ sinon.

Donc $|S|^2 = n$.

12) Par passage à la limite, f est croissante. On suppose f lipchitzienne de rapport C .

On va considérer une subdivision finie $(x_k)_{0 \leq k \leq N}$, avec $x_k = \frac{k}{N}$.

Pour $x \in [0, 1]$, il existe $k \in \llbracket 1, N \rrbracket$ tel que $x_{k-1} \leq x \leq x_k$.

On a alors $f(x) - f_n(x) \leq f(x_k) - f_n(x_{k-1}) = |f(x_k) - f(x_{k-1})| + |f(x_{k-1}) - f_n(x_{k-1})|$.

De même $f_n(x) - f(x) \leq f_n(x_k) - f(x_{k-1}) = -|f_n(x_k) - f(x_k)| - |f(x_k) - f(x_{k-1})|$.

Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{M}{N} \leq \varepsilon$. On a ainsi $|f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq \varepsilon$ pour tout k .

Or, on a $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f_n(x_k) - f(x_k)| = 0$.

Comme $\llbracket 0, N \rrbracket$ est fini, on a pour $n \geq n_0$ assez grand, $\forall k \in \llbracket 0, N \rrbracket$, $|f_n(x_k) - f(x_k)| \leq \varepsilon$.

On en déduit que $\forall n \geq n_0, \forall x \in [0, 1], -\varepsilon \leq f(x) - f_n(x) \leq \varepsilon$, c'est-à-dire $\sup |f - f_n| \leq 2\varepsilon$.

Remarque : La propriété est vraie en remplaçant f lipschitzienne par f continue.

En effet, l'approximation uniforme par des fonctions en escaliers garantit la propriété dite d'uniforme continuité :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall (x, y) \in [0, 1]^2, |x - y| \leq \alpha \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

Il suffit alors dans la preuve de choisir N de sorte que le pas $\frac{1}{N}$ soit inférieur à α .

13) - Supposons que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est périodique de période N . On considère $n = qN + r$.

$$\text{Alors } x = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^N \frac{\varepsilon_{qN+r}}{2^{qN+r}} = \sum_{q=0}^{+\infty} \sum_{r=1}^N \frac{\varepsilon_r}{2^{qN+r}} = \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{y}{2^{qN}}, \text{ où } y = \sum_{r=1}^N \frac{\varepsilon_r}{2^r}.$$

$$\text{On a } \sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{qN}} = \frac{1}{1 - 1/2^N} = \frac{2^N}{2^N - 1}, \text{ donc } x = \frac{p}{q}, \text{ avec } p = \sum_{r=1}^N 2^{N-r} \varepsilon_r < q = 2^N - 1 \text{ impair.}$$

- Réciproquement, supposons $x = \frac{p}{q}$ et $0 \leq p < q$ et q impair.

Vu le calcul précédent, il suffit de prouver qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que q divise $2^N - 1$.

En effet, on pourra alors mettre x sous la forme précédente.

Il s'agit donc de trouver $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $2^N \equiv 1 [q]$.

Or, la suite $(2^n \bmod q)_{n \in \mathbb{N}}$ prend un nombre fini de valeurs, donc il existe $0 \leq i < j \leq q$ tel que $2^i \equiv 2^j [q]$.

Donc q divise $2^i(2^{j-i} - 1)$, et comme q est impair, on a q divise $(2^{j-i} - 1)$. Ainsi, $N = j - i$ convient.