

TD Orlaux (préparation 5 bis, spécifique X-ENS)

1) On considère $Y = \text{card}\{X_1, \dots, X_n\}$, où les X_k sont i.i.d. de loi uniforme sur $\llbracket 1, N \rrbracket$.

a) Calculer $E(Y)$.

b) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{N} E(Y)$ pour les trois cas : $n \rightarrow +\infty$ (avec N fixé), $N \rightarrow +\infty$ (avec n fixé), $N = n \rightarrow +\infty$.

2) Alice et Bob possèdent chacun un sac avec n jetons numérotés de 1 à n .

Alice tire un jeton au hasard. Bob tire ensuite des jetons, sans remise, jusqu'à ce que le numéro tiré soit supérieur ou égal au numéro tiré par Alice.

On note Y le nombre de jetons tirés par Bob. Déterminer la loi de Y .

3) On considère $(2n + 1)$ réels positifs, avec $n \geq 1$. On suppose qu'en enlevant un terme arbitraire, on peut toujours répartir les $2n$ réels restants en deux parties dont les sommes sont égales.

Montrer que tous les réels sont égaux.

3) bis) Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $\forall i, a_{ii} = 0$ et $\forall i \neq j, a_{ij} \in \{-1, 1\}$.

Montrer que si n est pair, alors $\det A$ est un entier impair (et en particulier A inversible).

Indication : Se ramener au cas où $\forall i \neq j, a_{ij} = 1$.

4) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle positive. On définit $\forall n \in \mathbb{N}^*, x_n = a_0 + \sqrt{a_1 + \sqrt{a_2 + \dots + \sqrt{a_n}}}$.

Montrer que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée ssi il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq \lambda^{(2^n)}$.

5) On considère $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k \sin(kt + \varphi_k)$, avec $a_n > 0$.

Pour $p \in \mathbb{N}$, on note N_p le nombre de zéros de $f^{(p)}$ sur $[0, 2\pi[$.

Montrer que $(N_p)_{p \in \mathbb{N}}$ est croissante et que $N_p = 2n$ pour p assez grand.

6) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $f : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $f(0) = f(2\pi)$.

On suppose que $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \int_0^{2\pi} f(t) \sin(kt) dt = \int_0^{2\pi} f(t) \cos(kt) dt = 0$.

Quel est le nombre minimal de zéros de f ?

7) Soient A, B, C trois points du plan $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$ d'affixes a, b, c .

Calculer l'affixe z de l'orthocentre H (= intersection des hauteurs) du triangle (ABC) .

8) On pose $a = \sqrt{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, S_n = \sum_{k \in A_n} \frac{1}{\sqrt{\frac{k}{n} - a}}$, où $A_n = \left\{ k \in \mathbb{N} \mid a \leq \frac{k}{n} \leq a + 1 \right\}$.

Montrer que $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bornée.

9) Les deux questions sont indépendantes. Soit $y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 et $p : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ continue.

a) On suppose $y'' + p(x)y = 0$, avec p intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que si y est bornée, alors $\lim_{+\infty} y' = 0$.

b) On suppose $y'' + p(x)y = 0$, avec $p(x) \geq 1$. Montrer que y s'annule sur tout intervalle $[a, a + \pi]$.

Indication : Considérer $\frac{z}{y}$, où $z'' + z = 0$. Noter que $(z'y - zy')' = (p(x) - 1)zy$.

10) (★) Soit $P(z) = \prod_{k=1}^n (z - z_k)$ un polynôme de $\mathbb{C}[X]$ scindé à racines simples avec $\text{Im } z_k < 0$.

Montrer que $Q(x) = \text{Re}(P(x))$ est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

11) (★) Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair. On pose $\omega = \exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$ et $S = \sum_{k=0}^{n-1} \omega^{(k^2)}$. Montrer que $|S| = \sqrt{n}$.

12) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions croissantes convergeant simplement vers f sur $[0, 1]$.

On suppose f lipschitzienne. Montrer que la convergence est uniforme.

Indication : Noter que la convergence est naturellement uniforme sur toute partie finie de $[0, 1]$.

13) Soit $x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\varepsilon_n}{2^n} \in [0, 1[$, avec $\forall n \in \mathbb{N}^*, \varepsilon_n \in \{0, 1\}$.

Montrer que $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est périodique ssi $\exists (p, q) \in \mathbb{N}^2, x = \frac{p}{q}$ et $0 \leq p < q$ et q impair.