

TD Orlaux (préparation 5)

1) Une urne contient a boules jaunes et b boules rouges. On effectue une succession de tirages d'une boule, et à chaque étape on remet dans l'urne la boule tirée ainsi qu'une nouvelle boule de la même couleur.

On note X_n la v.a. donnant le nombre de boules jaunes présentes dans l'urne après n tirages.

On considère T_n l'événement : " La boule tirée au n -ième tirage est jaune ".

a) Déterminer $P(T_2 | T_1)$.

b) Déterminer $E(X_n)$.

2) On considère l'espace E des suites réelles bornées $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ muni de la norme $\|u\|_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |u_n|$.

Soit $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| < +\infty$.

a) Donner une CNS sur a pour que $N_a(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n |u_n|$ définisse une norme sur E .

b) Dans ce cas, les normes N_a et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

c) Donner une CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ pour que les normes N_a et N_b soient équivalentes.

3) a) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n - u_n^2$.

Déterminer un équivalent de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

b) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $0 < u_0 < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + u_n^2)$.

Montrer qu'il existe $\lambda > 0$ tel que $u_n \sim \lambda 2^{-n}$.

4) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs dans $[a, b]$ telle que $E(X) = 0$.

Montrer que $E(X^2) \leq -ab$. Préciser les cas d'égalité.

5) Soit $P(X) = X^{11} - 14X^2 - 5X + 1$.

Montrer que P admet au moins une racine complexe de module strictement inférieur à 1.

6) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ un polynôme de degré n . On considère $M = (P(i+j))_{0 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$.

Montrer que M est inversible.

7) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe : $\forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda)f(y)$

(ii) pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, la matrice Hessienne $H_f(x) \in S_n^+(\mathbb{R})$.

Corrigé

1) a) $P(T_2 | T_1) = \frac{a+1}{a+b+1}$, puisque si T_1 est réalisée, il y a $a+1$ boules jaunes et b boules rouges.

b) On a $X_n = X_{n-1} + 1_{T_n}$. On a aussi $P(T_n | X_{n-1} = k) = \frac{k}{a+b+n-1}$.

Donc $P(T_n) = \sum_{k \geq a} P(T_n | X_{n-1} = k) P(X_{n-1} = k) = \sum_{k \geq a} \frac{k P(X_{n-1} = k)}{a+b+n-1} = \frac{E(X_{n-1})}{a+b+n-1}$.

On a ainsi $E(X_n) = E(X_{n-1}) + P(T_n) = \left(1 + \frac{1}{a+b+n-1}\right) E(X_{n-1})$.

Comme $X_0 = a$, on obtient finalement $E(X_n) = a \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{1}{a+b+k-1}\right)$.

2) a) La CNS est ; $\forall n \in \mathbb{N}, a_n > 0$ (considérer les $u = (\delta_{k=n})_{k \in \mathbb{N}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$).

b) On a $N_a(u) \leq K \|u\|_\infty$, où $K = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n$.

Mais les normes ne sont pas équivalentes : considérons $u^{(n)} = \left(\frac{\delta_{k=n}}{a_k}\right)_{k \in \mathbb{N}}$.

On a $\|u^{(n)}\|_\infty = \frac{1}{a_n}$ et $N_a(u^{(n)}) = 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\|u^{(n)}\|_\infty}{N_a(u^{(n)})} = +\infty$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$.

c) On vérifie que N_a et N_b soient équivalentes ssi $a_n = O(b_n)$ et $b_n = O(a_n)$,

c'est-à-dire ssi il existe K et $L > 0$ tels que $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \leq K b_n$ et $b_n \leq L a_n$.

3) a) On étudie $x \mapsto x - x^2$ et on fait un schéma en représentant $y = x$ aussi.

On en déduit que $]0, 1[$ stable par f et $f < \text{Id}$ sur $]0, 1[$. D'où on déduit aisément $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$.

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}} = 1$, donc par Césaro, $u_n \sim \frac{1}{n}$.

b) On vérifie comme au a) que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0^+$.

On a alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$, donc par d'Alembert, $\sum u_n$ converge.

Posons $v_n = 2^n u_n$. On a $v_{n+1} = v_n(1 + u_n)$, donc $\ln v_{n+1} - \ln v_n = O(u_n)$.

Comme $\sum u_n$ converge, alors $\sum (\ln v_{n+1} - \ln v_n)$ converge, donc il existe $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n > 0$.

4) $(X - a)(b - X) \geq 0$, donc $X^2 \leq -ab + (a + b)X$, d'où par linéarité et ordre, $E(X^2) \leq -ab$.

Il y a égalité lorsque X à valeurs dans $\{a, b\}$, avec $P(X = a) = \frac{b}{b-a}$ et $P(X = b) = \frac{-a}{b-a}$.

5) Supposons par l'absurde que les 11 racines complexes de P sont de module ≥ 1 .

Comme le produit des modules des racines est égal à 1, alors elles sont toutes de module 1.

Comme P est de degré impair, P admet une racine réelle.

Or, ni 1 ni -1 n'est racine. D'où une contradiction.

6) Remarque : Pour $Q \in \mathbb{R}_n[X]$, on a $Q(X) = \sum_{j=0}^n Q(j) L_j(X)$, où $(L_j)_{0 \leq j \leq n}$ base de Lagrange.

Donc M est la matrice de la famille $(P_0, \dots, P_n)$ dans $\mathcal{B} = (L_j)_{0 \leq j \leq n}$, où $P_j(X) = P(X + j)$.

Par la formule de Taylor pour les polynômes, on a $P(i + j) = \sum_{k=0}^n P^{(k)}(i) \frac{j^k}{k!}$.

Donc $M = AB$, où $A = (P^{(k)}(i))_{0 \leq i \leq n, 0 \leq k \leq n}$ et $B = \left(\frac{j^k}{k!}\right)_{0 \leq k \leq n, 0 \leq j \leq n}$.

La matrice B est inversible (cf Van der Monde) et $\det B = \frac{\prod_{0 \leq j < k \leq n} (k - j)}{\prod_{k=0}^n k!} = 1$.

On a $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(P, P', \dots, P^{(n)})$, donc A est inversible (degrés échelonnés).

Remarque : $A = \text{Mat}(i^j)_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n} \text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(P, P', \dots, P^{(n)})$, ce qui permet de calculer $\det A$, car $\det \text{Mat}_{(1, X, \dots, X^n)}(P, P', \dots, P^{(n)})$ vaut $(-1)^{n+1}$ fois le produit des coefficients dominants des $P^{(k)}$.

7) On montre d'abord (en passant par les coordonnées ou par un DL)

que si $g(t) = f(a + tv)$, alors $g'(t) = \langle \nabla f(a + tv), v \rangle$ et $g''(t) = \langle v, H_f(a + tv)v \rangle$.

- Si $H_f(x)$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, alors g est convexe.

En posant $b = a + v$, on obtient bien $\forall t \in [0, 1]$, $g(t) = g((1-t)0 + t1) \leq (1-t)g(0) + tg(1)$,

c'est-à-dire $\forall t \in [0, 1]$, $f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$. Donc f est convexe.

- Réciproquement, si f est convexe, alors on montre aisément que g est convexe, donc $g''(t) \geq 0$.

Ainsi, en prenant $t = 0$, on a $\langle v, H_f(a)v \rangle \geq 0$ pour tout v , c'est-à-dire $H_f(a) \in S_n^+(\mathbb{R})$.