

TD Orlaux (préparation 4 bis, spécifique X-ENS)

1) Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(U) = U$, où $U = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

2) a) Soit $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme unitaire de degré n et à coefficients entiers.

Montrer que si un nombre rationnel $r \in \mathbb{Q}$ est racine de P , alors r est un entier (c'est-à-dire $z \in \mathbb{Z}$).

b) Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $\theta = \frac{2\pi}{p}$. Montrer que $\cos \theta \in \mathbb{Q}$ ssi $p \in \{1, 2, 3, 4, 6\}$.

Indication : Montrer que $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$ en utilisant a) et une variante de polynômes bien connus.

3) a) Montrer que $N(A) = \sup_{U \in O_n(\mathbb{R})} \text{tr}(AU)$ est une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

b) Soient A et $B \in GL_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T A = B^T B$. Montrer qu'il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = UB$.

c) On admet que b) est vraie pour toutes matrices A et $B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $A^T A = B^T B$.

En déduire la propriété de décomposition polaire :

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ et $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = US$.

Remarque : Une variante de la preuve est donnée dans l'opus n° 10, question 6).

d) On note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ les valeurs propres de $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$. Montrer que $N(A) = \sum_{i=1}^n \sqrt{\lambda_i}$.

e) Comparer N avec $M(A) = \sup_{\|X\|=1} \|AX\|$, où $\| \cdot \|$ est la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$.

4) Montrer que $\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$ est DSE en tout réel $a > 0$.

5) Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($x_1, x_2, \dots, x_n \mapsto y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$) de classe C^2 .

On suppose que $f(\vec{0}) = 0$ et que $\nabla f(\vec{0}) = \vec{0}$.

Montrer qu'il existe une sphère de $\mathbb{R}^{n+1}$ passant par $\vec{0}$ et située au-dessus du graphe de f .

Recommandation : Commencer à traiter le cas $n = 1$: étant donné une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(0) = f'(0) = 0$, il existe un cercle de $\mathbb{R}^2$ situé au-dessus du graphe de f .

6) On note E l'ensemble des fonctions réelles bornées et lipchitziennes sur $\mathbb{R}$.

On pose $N(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \neq y} |\Delta(x, y)|$, avec pour $x \neq y$, $\Delta(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y}$.

a) Montrer que E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel et que N est une norme sur E .

b) On pose F le sev des fonctions $f \in E$ de classe C^1 . Montrer que F est un fermé de E .

7) Soit $f :]-r, r[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction DSE en 0 sur $] -r, r[$, avec $r > 0$.

Montrer que $g : x \mapsto \exp(f(x))$ est DSE au voisinage de 0.

Corrigé

1) (*Analyse*) Supposons $P(U) \subset U$. On a $\forall \theta \in \mathbb{R}, |P(e^{i\theta})|^2 = 1$, c'est-à-dire $P(e^{i\theta})\overline{P}(e^{-i\theta}) = 1$.

Donc $\forall z \in U, P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = 1$. Or, $P(X)\overline{P}(\frac{1}{X}) = \frac{A(z)}{B(z)}$ est une fraction, et on a ainsi $\forall z \in U, A(z) = B(z)$.

Comme U est infini, les polynômes A et B sont égaux, d'où $\forall z \in \mathbb{C}^*, P(z)\overline{P}(\frac{1}{z}) = 1$.

Donc P n'admet aucune racine non nulle, donc est un monôme λX^n .

(*Synthèse*) Les seules solutions sont donc les $P(X) = \lambda X^n$, avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

2) a) On pose $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$, avec $a_n = 1$ et $a_k \in \mathbb{Z}$. On pose $r = \frac{p}{q}$ irréductible (et $q \in \mathbb{N}^*$).

On a $\sum_{k=0}^n a_k p^k q^{n-k} = 0$ (toute relation entre rationnels revient à une relation entre entiers).

Donc q divise $a_n p^n = p^n$, et comme $\text{pgcd}(p, q) = 1$, alors $q = 1$.

b) On a $\cos(p\theta) = \cos(2\pi) = 1$.

Or, $2 \cos(p\theta) = T_p(2 \cos \theta)$, où T_p est un polynôme entier à coefficients dans $\mathbb{Z}$:

il s'agit d'un cousin du polynôme de Tchebychev habituel, mais T_p ici est unitaire et à coeff dans $\mathbb{Z}$.

En effet, on a $2 \cos((n+1)\theta) + \cos((n-1)\theta) = (2 \cos \theta)(2 \cos n\theta)$.

On obtient donc $T_0 = 2, T_1 = X$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, T_{n+1} = XT_n - T_{n-1}$. D'où la propriété par récurrence.

Et on a $T_n(2 \cos \theta) = 2$, donc $2 \cos \theta$ est racine d'un polynôme unitaire et à coefficients dans $\mathbb{Z}$.

Donc $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$, c'est-à-dire $2 \cos \theta \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, ce qui permet de conclure.

3) a) L'application $f : U \rightarrow \text{tr}(AU)$ est continue sur le compact $O_n(\mathbb{R})$, donc est bornée.

Ainsi, $N(A)$ existe (et par les bornes atteintes, il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $N(A) = \text{tr}(AU)$).

On vérifie par les propriétés du sup et par linéarité de tr que $N(\lambda A) = |\lambda| N(A)$ et $N(A+B) \leq N(A) + N(B)$.

On a aussi $N(A) \geq 0$, car I_n et $-I_n \in O_n(\mathbb{R})$ (et $\text{tr} A$ ou $\text{tr}(-A)$ est positif).

Il reste à prouver que $N(A) = 0$ implique $A = O_n$. Supposons $\forall U \in O_n(\mathbb{R}), \text{tr}(AU) = 0$.

Donc pour tout $B \in \text{Vect}(O_n(\mathbb{R}))$, $\text{tr}(AB) = 0$, c'est-à-dire $A^T \in \text{Vect}(O_n(\mathbb{R}))^\perp$ pour $\langle A, B \rangle = \text{tr}(A^T B)$.

Il reste donc à prouver que $\text{Vect}(O_n(\mathbb{R})) = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, c'est-à-dire que $\forall (i, j), E_{ij} \in O_n(\mathbb{R})$.

Or, on a $E_{ii} = \frac{1}{2}(I_n + \text{Diag}(1, \dots, 1, -1, 1, \dots, 1)) \in O_n(\mathbb{R})$.

Et $E_{12} = \frac{1}{2} \left(\left(\begin{array}{c|c} V & O \\ \hline O & I_{n-2} \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c|c} W & O \\ \hline O & I_{n-2} \end{array} \right) \right)$, où $V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $W = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

On peut aisément généraliser cette relation à E_{ij} , où $i \neq j$, en permutant l'ordre des vecteurs de la base.

D'où le résultat.

b) On pose $U = AB^{-1}$, et on a bien $U^T U = (B^T)^{-1} A^T A B^{-1} = (B^T)^{-1} B^T B B^{-1} = I_n$.

c) On considère $S \in S_n^+(\mathbb{R})$ telle que $A^T A = S^2$ (on applique le th spectral à $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$).

On a donc $A^T A = S^T S$, donc par b), il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $A = US$.

d) On a alors pour tout $V \in O_n(\mathbb{R})$, $\text{tr}(AV) = \text{tr}(USV) = \text{tr}(UW^T DWV)$, avec $D = \text{Diag}(\sqrt{\lambda_1}, \dots, \sqrt{\lambda_n})$ et on peut prendre $W \in O_n(\mathbb{R})$ par le th spectral.

Donc $\text{tr}(USV) = \text{tr}(DWVUW^T)$. Lorsque V décrit $O_n(\mathbb{R})$, $WVUW^T$ décrit $O_n(\mathbb{R})$.

Donc $N(A) = \sup_{V \in O_n(\mathbb{R})} \text{tr}(AV) = \sup_{W \in O_n(\mathbb{R})} \text{tr}(DW)$.

Or, $\text{tr}(DW) = \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j} w_j \leq \sqrt{\lambda_j}$ (avec égalité lorsque $W = I_n$). Donc $N(A) = \sum_{j=1}^n \sqrt{\lambda_j}$.

e) On a $M(A)^2 = \sup_{\|X\|=1} (\|AX\|^2) = \sup_{\|X\|=1} (X | A^T A X) = \max \text{Sp}(A^T A)$: cf Haüsdorffien.

Donc $M(A) = \sqrt{\max \text{Sp}(S^2)} = \max_{1 \leq j \leq n} (\lambda_j)$. On a donc $M(A) \leq N(A) \leq nM(A)$.

4) On cherche $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que pour $|x|$ assez petit, $\Gamma(a+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

On a $\Gamma(a+x) = \int_0^{+\infty} t^{a-1} e^{x \ln t} e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} (\ln t)^n t^{a-1} e^{-t} dt$.

Posons $u_n = \int_0^{+\infty} |\ln t|^n t^{a-1} e^{-t} dt$. Il s'agit de prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{|x|^n}{n!}$ converge pour $|x|$ assez petit.

On a $\int_1^{+\infty} |\ln t|^n t^{a-1} e^{-t} dt \leq \int_1^{+\infty} t^{n+a-1} e^{-t} dt \leq \Gamma(n+a) \leq (n+p)! = O(n^p n!)$, où $p = [a]$.

D'autre part, $\int_0^1 |\ln t|^n t^{a-1} e^{-t} dt \leq \int_0^1 |\ln t|^n t^{a-1} dt = \frac{n!}{a^n} \int_0^1 t^{a-1} dt = \frac{n!}{a^{n+1}}$.

D'où $u_n \frac{|x|^n}{n!} = O\left(n^p |x|^n + \frac{|x|^n}{a^n}\right)$, donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \frac{|x|^n}{n!}$ converge pour $|x| < \min(1, a)$.

Autre méthode (plutôt déconseillée ici) : On sait par le cours que Γ est de classe C^∞ .

On montre que $\Gamma(a+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\Gamma^{(n)}(a)}{n!} x^n$ en utilisant l'inégalité de Taylor-Lagrange.

On a en effet $\left| \Gamma(a+x) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Gamma^{(k)}(a)}{k!} x^k \right| \leq |x|^n \sup_{[a, a+x]} \frac{|\Gamma^{(n)}|}{n!}$.

On a $|\Gamma^{(n)}(a+x)| \leq \int_0^{+\infty} |\ln t|^n t^{a+x-1} e^{-t} dt$, et on utilise le même type de majorations que précédemment.

5) - Cas $n = 1$: un schéma montre que le cercle doit être situé au-dessus de la droite (Ox) .

Donc le cercle cherché a nécessairement une équation de la forme $x^2 + (y-r)^2 = r^2$, avec $r > 0$.

L'idée essentielle est de remarquer qu'il existe une parabole passant par $\vec{0}$ et situé au-dessus du graphe de f , ce qui résulte de l'inégalité de Taylor-Lagrange (ou de la formule Taylor-Young) :

On a $\forall x \in [-1, 1]$, $|f(x) - f(0) - xf'(0)| \leq \frac{x^2}{2} \sup_{[-1, 1]} |f''|$, c'est-à-dire $f(x) \leq Mx^2$, où $M = \frac{1}{2} \sup_{[-1, 1]} |f''|$.

Il suffit donc de trouver un cercle passant par $\vec{0}$ et situé au-dessus de la parabole $y = Mx^2$.

On veut donc trouver r tel que $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ implique $x \in [-1, 1]$ et $y \geq Mx^2$.

Or, $x^2 + (y-r)^2 = r^2$ équivaut à $x^2 + y^2 = 2ry$, ce qui implique $x \in [-r, r]$ et $y \geq \frac{1}{2r} x^2$.

On peut donc conclure en prenant $r = \min\left(\frac{1}{2M}, 1\right)$.

- Cas général : On utilise les mêmes principes.

On sait que $f(\vec{x}) = \frac{1}{2} \langle \vec{x}, u(\vec{x}) \rangle + o(\|\vec{x}\|^2)$, où u est l'endomorphisme associé à $H_f(\vec{0})$.

On sait (cf Haüsdorffien) que $\forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$, $\langle \vec{x}, u(\vec{x}) \rangle \leq \mu \|\vec{x}\|^2$, où $\mu = \text{Sp}(H_f(\vec{0}))$.

On fixe $\varepsilon > 0$.

Il existe donc un voisinage $V = B(\vec{0}, \alpha)$ tel que $\forall \vec{x} \in V$, $f(x) \leq M \|\vec{x}\|^2$, où $M = \frac{1}{2}\mu + \varepsilon$.

Il suffit donc de trouver une sphère passant par $\vec{0}$ et située au-dessus du parabolöide $y = M \|\vec{x}\|^2$.

On veut donc trouver r tel que $\|\vec{x}\|^2 + (y-r)^2 = r^2$ implique $x \in [-\varepsilon, \varepsilon]$ et $y \geq M \|\vec{x}\|^2$.

Or, $\|\vec{x}\|^2 + (y-r)^2 = r^2$ équivaut à $\|\vec{x}\|^2 + y^2 = 2ry$, ce qui implique $x \in [-r, r]$ et $y \geq \frac{1}{2r} \|\vec{x}\|^2$.

On peut donc conclure en prenant $r = \min\left(\frac{1}{2M}, \varepsilon\right) > 0$.

6) a) On a $0 \in E$.

Comme f est k -lipschitzienne, alors $\sup_{x \neq y} |\Delta(x, y)| \leq k$, d'où l'existence de $N(f) \in \mathbb{R}^+$.

Si f et g lipschitziennes de rapport k et l , alors $f + g$ est lipschitzienne de rapport $\max(k, l)$.

On a $N(f) = 0 \Rightarrow \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| = 0 \Rightarrow f = 0$.

On vérifie aisément que $N(\lambda f) = |\lambda| N(f)$ et $N(f + g) \leq N(f) + N(g)$ en utilisant les propriétés de $\sup$.

b) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de F de classe C^1 convergeant vers $f \in E$.

On note que si g est de classe C^1 , alors $\sup_{x \in \mathbb{R}} |g'| \leq \sup_{x \neq y} \left| \frac{g(x) - g(y)}{x - y} \right|$ par l'inégalité des acc finis.

(remarque : en fait, il a égalité, car toute dérivée est limite de pentes).

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} N(f - f_n) = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \in \mathbb{R}} |(f - f_n)| = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{x \neq y} |(\Delta - \Delta_n)| = 0$.

Ainsi, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv unif vers f (donc simplement) et $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv unif vers Δ sur $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$.

On fixe y et on applique alors le th d'interversion des limites à la suite des fonctions $y \mapsto \Delta_n(x, y)$:

On a donc $\lim_{y \rightarrow x, y \neq x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n(x, y)$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow x, y \neq x} \Delta_n(x, y)$ existent et sont égales.

Or, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \Delta_n(x, y) = \Delta(x, y)$ et $\lim_{y \rightarrow x, y \neq x} \Delta_n(x, y) = f'_n(x)$. Donc $f'(x)$ existe et $f'(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x)$.

Par ailleurs, on a par l'IAF, $\sup_{x \neq y} |(f - f'_n)| \leq \sup_{x \neq y} |(\Delta - \Delta_n)| \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Ainsi, $(f'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément, donc f' est continue (cf th du cours). Ainsi, $f \in F$ et F est fermé.

Remarque : Pour respecter *stricto sensu* le programme, il conviendrait de justifier le th d'interversion des limites par le th de la double limite (sur les séries de fonctions) :

On considère $\sum (\Delta_n - \Delta_{n-1})$ au lieu de $(\Delta_n)_{n \in \mathbb{N}}$, qui converge uniformément (en y), d'où :

$$\lim_{y \rightarrow x, y \neq x} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{n=1}^{+\infty} (\Delta_n(x, y) - \Delta_{n-1}(x, y)) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{y \rightarrow x, y \neq x} \sum_{n=1}^{+\infty} (\Delta_n(x, y) - \Delta_{n-1}(x, y)).$$

7) On peut supposer $f(0) = 0$, car $\exp(f(x)) = \lambda \exp(f(x) - f(0))$, où $\lambda = e^{f(0)}$.

Première méthode : g est l'unique fonction vérifiant $g'(x) = f(x)g(x)$ et $g(0) = 1$.

On cherche g sous la forme $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

On obtient la CNS : $\forall n \in \mathbb{N}, (n+1)b_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k b_{n-k}$.

On cherche M et $\rho > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq M\rho^n$.

On constate que si $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n |a_k| \rho^k \leq 1$, on peut prouver cette inégalité par récurrence forte.

Or, par continuité de $x \mapsto \sum_{k=0}^n |a_k| x^k$ en $x = 0$ et sachant que $a_0 = 0$, on est sûr que ρ existe.

On obtient donc finalement $\forall n \in \mathbb{N}, |b_n| \leq M\rho^n$.

Donc $x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$ définit bien une solution de rayon $R \geq \frac{1}{\rho} > 0$. Donc g est bien DSE en 0.

Seconde méthode : $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f(x)^k}{k!}$. Par produit de Cauchy, $\frac{f(x)^k}{k!}$ est DSE sur $] -r, r[$.

On pose $\frac{f(x)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} x^n$. On a ainsi $g(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{n,k} x^n$.

Si on peut appliquer Fubini, on peut conclure car $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$, avec $c_n = \sum_{k=0}^{+\infty} a_{n,k}$.

Il suffit donc de prouver que pour $|x|$ assez petit, $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n,k}| |x|^n < +\infty$.

Posons $\hat{f}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} |a_n| x^n$, définie aussi pour tout $x \in] -r, r[$.

On vérifie aisément que $\sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} |a_{n,k}| |x|^n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\hat{f}(|x|)^k}{k!}$, qui est $< +\infty$ pour tout $x \in] -r, r[$.

On conclut donc que Fubini s'applique et donc que $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ sur $] -r, r[$.

Donc g est DSE en 0 sur $] -r, r[$ (ce résultat est meilleur que celui de la première preuve).