

TD Oaux (préparation 4)

1) On réalise des lancers de fusées sachant que la probabilité d'échec vaut p , avec $0 < p < 1$.

a) Déterminer un nombre n tel que la probabilité d'avoir au moins un échec après n lancers dépasse 0.5

b) Montrer qu'il existe n tel que la probabilité d'avoir au moins 10 échecs après n lancers dépasse 0.5

2) On note E l'ensemble des fonctions réelles de classe C^1 et lipchitziennes sur $\mathbb{R}$.

On pose $N_a(f) = |f(a)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)|$.

a) Montrer que N_a est une norme.

b) Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, N_a et N_b sont équivalentes.

3) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant $AB - BA = A$.

a) Montrer que A n'est pas inversible et que $\text{Ker } A$ est stable par B .

b) Montrer que A est nilpotente et que A et B sont cotrigonalisables.

c) On propose une autre preuve pour montrer que A est nilpotente.

On vérifie aisément (par récurrence) que $A^k B - BA^k = kA^k$, d'où $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\text{tr}(A^k) = 0$.

Montrer que A est nilpotente.

d) On suppose ici que $AB - BA = A + B$. Montrer que A et B sont cotrigonalisables.

4) On munit $E = \mathbb{C}[X]$ des normes $N(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| \frac{P^{(k)}(0)}{k!} \right|$ et $M(P) = \sqrt{\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta}$.

a) On rappelle que les normes usuelles sont connues. Montrer que N et M sont des normes sur $\mathbb{C}[X]$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Expliciter α et $\beta > 0$ telles que $\forall P \in \mathbb{C}_n[X]$, $N(P) \leq \alpha M(P)$ et $M(P) \leq \beta N(P)$.

c) Les normes sont-elles équivalentes sur $\mathbb{C}[X]$?

5) On considère la suite de polynômes définie par $P_0(x) = 0$ et $P_{n+1}(x) = \frac{1}{2}(x + P_n(x)^2)$.

Montrer que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une fonction ϕ à préciser.

Corrigé

1) a) Le nombre M d'échecs suit une loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$. On a $P(M = 0) = q^n$. Donc $P(M \geq 1) = 1 - q^n$.

On choisit donc n tel que $q^n \leq \frac{1}{2}$, c'est-à-dire $n \geq \left\lceil \frac{\ln 2}{\ln q} \right\rceil$.

b) Par Bienaymé-Tchebychev et la loi faible grands nombres, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P\left(\left|\frac{M}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \varepsilon\right) = 0$.

On prend $n > 20$, de sorte que $\frac{10}{n} < \frac{1}{2}$.

On a alors $P(M < 10) \leq P\left(\left|\frac{M}{n} - \frac{1}{2}\right| \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{10}{n}\right)\right) \leq \frac{V\left(\frac{M}{n}\right)}{\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{n}\right)^2} \leq \frac{pq}{n\left(\frac{1}{2} - \frac{10}{n}\right)^2} = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

Par pincement, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M < 10) = 0$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(M < 10) = 0$, d'où l'existence de n .

Autre méthode : Même principe qu'au a), avec ici :

$P(M < 10) = \sum_{k=0}^9 \binom{n}{k} q^{n-k} p^k \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow +\infty$, car $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^k q^n = 0$ pour tout k fixé.

2) a) On vérifie notamment que si $N_a(f) = 0$, alors $f(a) = 0$ et $f' = 0$, donc $f = 0$.

b) On a $f(b) = f(a) + \int_a^b f'(t) dt$, donc $|f(b)| \leq |f(a)| + |b - a| \sup |f'|$.

D'où $N_b(f) \leq |f(a)| + (1 + |b - a|) \sup |f'| \leq (1 + |b - a|) N_a(f)$. Par symétrie de a et b , N_a et N_b sont équivalentes.

3) a) On a $AB = (B + I_n)A$. Si A était inversible, B serait semblable à $B + I_n$, ce qui est absurde (cf trace).

Soit $x \in \text{Ker } A$. On a $ABx = 0$, donc $Bx \in \text{Ker } A$, et ainsi, $\text{Ker } A$ est stable par B .

b) On sait que $\dim \text{Ker } A \geq 1$, et on choisit une base dont le premier vecteur appartient à $\text{Ker } A$.

On a ainsi $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a = \left(\begin{array}{c|c} 0 & * \\ \hline 0 & A' \end{array} \right)$ et $\text{Mat}_{\mathcal{B}} b = \left(\begin{array}{c|c} \lambda & * \\ \hline 0 & B' \end{array} \right)$. On a $A'B' - B'A' = A'$.

Par hypothèse de récurrence sur n , A' nilpotente et il existe $Q \in GL_{n-1}(\mathbb{C})$ telle que $Q^{-1}A'Q$ et $Q^{-1}B'Q$ triangulaires supérieures. Avec $P = \left(\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & Q \end{array} \right)$, $P^{-1}A'P$ et $P^{-1}B'P$ sont triangulaires supérieures.

De plus, A est semblable à une matrice triangulaire supérieure stricte, donc est nilpotente.

c) On a pour tout polynôme P tel que $P(0) = 0$, on a $\text{tr}(P(A)) = 0$.

Par Lagrange, il existe un polynôme P tel que $P(0) = 0$ et $P(\lambda) = 1$ pour tout $\lambda \in \text{Sp}(A)$ non nul.

D'où $\text{tr}(P(A)) = m$ nombre de racines non nulles de χ_A .

Donc $m = 0$, et ainsi $\text{Sp}(A) = \{0\}$, c'est-à-dire A nilpotente.

d) On a $A(A + B) - (A + B)A = (A + B)$, ce qui permet de se ramener au cas traité précédemment.

4) a) $N(P)$ est la norme infinie (connue) d'un polynôme considéré comme la famille de ses coefficients.

On sait que $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})g(e^{i\theta}) d\theta$ définit un produit scalaire sur $C^0(U, \mathbb{R})$, de norme $\|f\|_2$.

On en déduit que M vérifie bien l'inégalité triangulaire :

$$M(P + Q) = \|P + Q\|_2 \leq \|P\|_2 + \|Q\|_2 \leq \|P\|_2 + \|Q\|_2 = M(P) + M(Q).$$

Par ailleurs, on a $M(\lambda P) = |\lambda| M(P)$ et $M(P) \geq 0$, avec égalité ssi P s'annule sur U , donc ssi $P = 0$.

b) On sait qu'en dimension finie, les normes sont bien équivalentes. On veut ici expliciter α et β .

- Posons $P(X) = \sum_{k=0}^n a_k X^k$. On a par la formule de Cauchy, $a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta$.

$$\text{Donc } |a_k| \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})| d\theta \leq \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta} \sqrt{\int_0^{2\pi} 1 d\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} M(P) \text{ par Cauchy-Schwarz.}$$

$$\text{D'où } N(P) \leq \frac{n+1}{\sqrt{2\pi}} M(P).$$

$$\text{Variante meilleure : on a } \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 d\theta = \int_0^{2\pi} \sum_{0 \leq j \leq n, 0 \leq k \leq n} a_j \bar{a}_k e^{i(j-k)\theta} d\theta = 2\pi \sum_{j=0}^n |a_j|^2.$$

$$\text{Donc } M(P)^2 = 2\pi \sum_{j=0}^n |a_j|^2. \text{ Par Cauchy-Schwarz, } N(P) = \sum_{j=0}^n |a_j| \leq \sqrt{n+1} \sqrt{\sum_{j=0}^n |a_j|^2} = \sqrt{\frac{n+1}{2\pi}} M(P).$$

$$\text{- On a } M(P) = \sqrt{2\pi \sum_{j=0}^n |a_j|^2} \leq \sqrt{2\pi (\sum_{j=0}^n |a_j|)^2} = \sqrt{2\pi} N(P).$$

c) On va montrer que les normes ne sont pas équivalentes.

Vu b), on cherche une suite $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{N(P_n)}{M(P_n)} = +\infty$.

On peut prendre $P_n(X) = 1 + X + \dots + X^n$. On a $N(P_n) = n + 1$ et $M(P_n) = \sqrt{2\pi(n+1)}$.

5) - On étudie d'abord la convergence simple.

Soit $x \in [0, 1]$. On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}(x + u_n^2)$.

On étudie la fonction $f : t \mapsto \frac{1}{2}(x + t^2)$. Elle admet $\lambda = \sqrt{x}$ comme unique point fixe.

$[0, \lambda]$ est stable par f et $f \geq \text{Id}$ sur $[0, \lambda]$. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et converge vers $\sqrt{x}$.

Donc $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $\phi : x \mapsto \sqrt{x}$.

- Montrons que la convergence est uniforme.

On a $\forall x \in [0, 1]$, $P_{n+1}(x) - \sqrt{x} = \frac{1}{2}(P_n(x) - \sqrt{x})^2$. Or, $|P_n(x) - \sqrt{x}| \leq 1$, car $P_n(x) \in [0, 1]$.

Donc $|P_{n+1}(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2} |P_n(x) - \sqrt{x}|$, d'où $|P_n(x) - \sqrt{x}| \leq \frac{1}{2^n} |P_0(x) - \sqrt{x}|$, d'où $\sup_{[0, 1]} |P_n - \phi| \leq \frac{1}{2^n}$.

Remarque : En fait, $\varepsilon_{n+1} = \frac{1}{2}\varepsilon_n^2$, on a $(\frac{1}{2}\varepsilon_{n+1}) = (\frac{1}{2}\varepsilon_n)^2$, donc $\frac{1}{2}\varepsilon_n = (\frac{1}{2}\varepsilon_0)^{(2^n)}$, et ici $\varepsilon_0 \leq 1$.