

TD Oaux (préparation 3 bis, oraux X-ENS)

1) Soit $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$ muni de la structure euclidienne canonique.

On pose $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $J(x) = \frac{1}{2} \langle x, Ax \rangle - \langle b, x \rangle$.

a) Montrer que J est strictement convexe : pour $x \neq y$ et $\lambda \in]0, 1[$, $J(\lambda x + (1 - \lambda)y) < \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y)$.

b) Montrer que $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} J(x) = +\infty$.

c) Montrer que J atteint son minimum en l'unique point x_0 vérifiant $Ax_0 = b$.

2) Soient X et Y deux v.a. à valeurs dans $\mathbb{Z}$, indépendantes et de même loi.

a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, $P(|X - Y| = r) \leq 2P(X = Y)$.

b) (★) Montrer que l'inégalité du a) est optimale.

c) (★★) Soient X et Y deux v.a. à valeurs réelles, indépendantes et de même loi.

Déduire de a) qu'il existe une constante K telle que $P(|X - Y| \leq 2) \leq K P(|X - Y| \leq 1)$.

3) a) Soit $A \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$. Justifier l'existence de $\exp(A) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{A^n}{n!}$.

b) (★) Soit $M = I_p + N$, où N nilpotente. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $M = \exp(P(M))$.

4) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite strictement croissante d'entiers naturels non nuls.

On tire des dés équilibrés, et le n -ième dé admet a_n faces numérotées de 1 à n .

On effectue les tirages tant que la suite des résultats est strictement croissante.

On note p la probabilité de faire une infinité de tirages.

a) Montrer que $p \geq \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

b) (★★) Montrer que $p \leq \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(a_n + 1)}{2a_{n+1}}\right)$.

c) Donner une CNS sur $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ pour que $p \neq 0$.

5) a) (★) Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang r . Montrer que $\text{rg } N \geq r$ au voisinage de M dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Indication : Il est conseillé de commencer par le cas $r = n$.

Remarque : Autrement dit, l'ensemble des matrices de rang $\geq r$ est un ouvert.

b) Soit A diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $\dim C(A)$, où $C(A) = \{B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \mid AB = BA\}$.

c) Montrer que toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est limite de matrices diagonalisables.

d) (★) Montrer que pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$, on a $\dim C(A) \geq n$.

Indication : Noter que $C(A) = \text{Ker } \phi_A$, où $\phi_A : \mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ $B \mapsto AB - BA$.

Corrigé

1) a) L'application $\phi(x, y) = \langle x, Ay \rangle$ est un produit scalaire, et $\varphi(x) = -\langle b, x \rangle$ est une forme linéaire.

Soient $x \neq y$ et $\lambda \in [0, 1]$. Posons $z = \lambda x + (1 - \lambda)y$.

On a $J(z) = \frac{1}{2} \lambda^2 \phi(x, x) + \lambda(1 - \lambda) \phi(x, y) + \frac{1}{2} (1 - \lambda)^2 \phi(y, y) + \lambda \varphi(x) + (1 - \lambda) \varphi(y)$.

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, $\phi(x, y) \leq \sqrt{\phi(x, x) \phi(y, y)} \leq \frac{1}{2} (\phi(x, x) + \phi(y, y))$.

Donc $J(z) \leq \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda(1 - \lambda))\phi(x, x) + \frac{1}{2}(\lambda^2 - \lambda(1 - \lambda))\phi(y, y) + \lambda\varphi(x) + (1 - \lambda)\varphi(y)$.

On obtient donc bien $J(z) \leq \lambda J(x) + (1 - \lambda)J(y)$.

Il y a égalité ssi $\phi(x, y) = \frac{1}{2}(\phi(x, x) + \phi(y, y))$, donc ssi $\phi(x - y, x - y) = 0$, c'est-à-dire $x = y$.

b) En appliquant le th spectral à A , on a $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\langle x, Ax \rangle \geq \mu \|x\|^2$, où $\mu = \text{Sp}(A) > 0$.

D'autre part, $\langle b, x \rangle \geq -\|b\| \|x\|$. Donc $J(x) = \mu \|x\|^2 - \|b\| \|x\| \rightarrow +\infty$ lorsque $\|x\| \rightarrow +\infty$.

c) *Première méthode* : Pour $\|x\| \geq r$ assez grand, $J(x) \geq J(\vec{0})$.

De plus, sur la boule compacte $K = B(\vec{0}, r)$, la fonction continue J atteint son minimum en un $x_0 \in K$.

On en déduit aisément que $\inf J(\mathbb{R}^n) = \inf J(K) = J(x_0)$.

Comme $\mathbb{R}^n$ est ouvert et que J est de classe C^1 , alors $\nabla J(x_0) = 0$.

Donc $\nabla J(x_0) = Ax_0 - b$, donc $x_0 = A^{-1}b$.

Seconde méthode : On pose $x_0 = A^{-1}b$.

On vérifie par calcul que $J(x_0 + h) = \frac{1}{2}\phi(h, h)$, donc $J(x_0 + h) \geq 0$, avec égalité ssi $h = 0$.

2) a) On pose $a_n = P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

On a $P(|X - Y| = r) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} 2a_n a_{n+r} \leq \sum_{n \in \mathbb{Z}} (a_n^2 + a_{n+r}^2) = 2P(X = Y)$.

b) On voudrait avoir $a_n = a_{n+r}$ mais ce n'est pas possible. On cherche à s'en approcher.

On considère X loi uniforme sur $\{r, 2r, \dots, Nr\}$, c'est-à-dire $\forall q \in \llbracket 1, N \rrbracket$, $P(X = qr) = \frac{1}{N}$.

On a alors $P(|X - Y| = r) = 2(N - 1) \times \frac{1}{N^2} = \frac{2(N - 1)}{N^2}$ et $P(X = Y) = N \times \frac{1}{N^2} = \frac{1}{N}$.

Comme $\lim_{N \rightarrow +\infty} \frac{2(N - 1)}{N} = 1$, alors l'inégalité du a) est optimale.

c) On considère $X_0 = \lfloor X \rfloor$ partie entière de X . On a X_0 et Y_0 à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et i.i.d.

On a $P(|X - Y| \leq 2) \leq P(|X_0 - Y_0| \leq 3) \leq 7P(X_0 = Y_0)$ en appliquant a) avec $r \in \{1, 2, 3\}$.

De plus, $X_0 = Y_0$ implique $P(|X - Y| \leq 1)$. Donc $P(|X - Y| \leq 2) \leq 7P(|X - Y| \leq 1)$.

3) a) En considérant une norme d'algèbre $\| \cdot \|$, on a $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\|$ converge.

Par équivalence des normes en dim finie, $\sum_{n=0}^{+\infty} \left\| \frac{A^n}{n!} \right\|_{\infty}$ converge, d'où la cv par coordonnées.

b) L'idée est de définir $P(M)$ correspond à un logarithme.

Or, $\ln(1 + x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n}$.

Comme $N^p = O_n$, on prend $P(M) = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1} (M - I_p)^n}{n} = \sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1} N^n}{n}$.

On a alors $\exp(P(M)) = \sum_{m=0}^{+\infty} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1} N^n}{n} \right)^m$.

Comme $\sum_{n=0}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1} N^n}{n} = NQ(N)$ et que $N^p = O_n$, alors $\exp(P(M)) = \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1} N^n}{n} \right)^m$.

Il reste à prouver que le polynôme $\sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1} X^n}{n} \right)^m = X + \text{termes de degré} \geq p$.

Ce qui résulte de la composée des $DL_p(0)$ de $\exp(\ln x) : \sum_{m=0}^{p-1} \frac{1}{m!} \left(\sum_{n=1}^{p-1} \frac{(-1)^{n-1} x^n}{n} \right)^m = x + O(x^p)$.

4) On note X_n la valeur du n -ième tirage. Ainsi, X_n suit la loi uniforme sur $\llbracket 1, a_n \rrbracket$.

On considère l'événement $A_n = (X_1 < X_2 < \dots < X_n)$.

Par continuité décroissante, $p = \lim_{n \rightarrow +\infty} P(A_n)$. Il est difficile de calculer explicitement $P(A_n)$.

On va donc chercher à encadrer p :

a) On a $P(A_{n+1} | A_n) \geq P(X_n > a_n) = \frac{a_{n+1} - a_n}{a_{n+1}} = 1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}$.

Donc $P(A_n) \geq \prod_{k=1}^{n-1} \left(1 - \frac{a_k}{a_{k+1}}\right)$, et ainsi $p \geq \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{a_n}{a_{n+1}}\right)$.

b) On a $P(A_{n+1} | A_n) = \sum_{k=1}^{a_n} P(A_{n+1} | A_n, X_n = k) P(X_n = k | A_n) = \sum_{k=1}^{a_n} \left(\frac{a_{n+1} - k}{a_{n+1}}\right) P(X_n = k | A_n)$.

Mais k est grand, plus $P(X_n = k | A_n)$ est grand.

Or, $b = \sum_{k=1}^{a_n} \left(\frac{a_{n+1} - k}{a_{n+1}}\right) P(X_n = k | A_n)$ est la valeur moyenne de $\left(\frac{a_{n+1} - k}{a_{n+1}}\right)$ pondéré par $P(X_n = k | A_n)$.

De plus, plus k est grand, plus $\left(\frac{a_{n+1} - k}{a_{n+1}}\right)$ est petit.

Donc $b \leq \left(1 - \frac{(a_n + 1)}{2a_{n+1}}\right)$ qui est la valeur moyenne arithmétique des $\frac{a_{n+1} - k}{a_{n+1}}$.

D'où on conclut $P(A_{n+1} | A_n) \geq \sum_{k=1}^{a_n} \frac{a_{n+1} - (a_n + 1)/2}{a_{n+1}} P(X_n = k | A_n) = \frac{a_{n+1} - (a_n + 1)/2}{a_{n+1}}$.

Et ainsi $p \geq \prod_{n=1}^{+\infty} \left(1 - \frac{(a_n + 1)/2}{a_{n+1}}\right)$.

c) On a le lemme suivant : Si $0 \leq \alpha_n < 1$, alors $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \alpha_n) \neq 0$ ssi $\sum \alpha_n$ converge.

Preuve du lemme : Par passage au $\ln$, on a $\prod_{n=1}^{+\infty} (1 - \alpha_n) = 0$ ssi $\sum_{n=1}^{+\infty} -\ln(1 - \alpha_n) = +\infty$.

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 0$, on utilise $-\ln(1 - \alpha_n) \sim \alpha_n$, donc les séries sont de même nature.

Si $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne tend pas vers 0, alors les deux séries divergent grossièrement. D'où le résultat.

Avec le lemme, et par pincement, on en conclut que $p \neq 0$ ssi $\sum \frac{a_n}{a_{n+1}}$ converge.

5) a) $GL_n(\mathbb{C})$ est un ouvert (car $\det$ continue), donc si M inversible, N au voisinage de M l'est aussi.

Dans le cas général, on a $M = PJ_rQ$, P et Q inversibles.

Au voisinage de I_r dans $GL_r(\mathbb{C})$, la matrice est inversible. Donc sur un voisinage ouvert V de J_r , les matrices sont de rang $\geq r$ (car contiennent une sous-matrice de rang r).

Comme $f : N \mapsto P^{-1}NQ^{-1}$ est continue, alors $f^{-1}(V)$ est ouvert donc au voisinage de N , on a $\text{rg } N \geq r$.

b) Si $B \in C(A)$, alors les sev propres E_λ sont stables par A , sur lequel A est une homothétie.

Comme une homothétie commute avec toute matrice, alors $B \in C(A)$ ssi les sev propres E_λ sont stables par A .

On en déduit que $\dim C(A) = \sum_{i=1}^p m_i^2$, où $m_i = \dim E_{\lambda_i}$ et $\text{Sp}(A) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_p\}$.

En particulier, $\dim C(A) \geq \sum_{i=1}^p m_i = n$.

c) On considère $A = PTP^{-1}$, avec T triangulaire supérieure et P matrice inversible.

On pose $T_k = T + \text{Diag}\left(\frac{1}{k}, \frac{2}{k}, \dots, \frac{n}{k}\right)$. On vérifie que pour k assez grand, les coefficients diagonaux de T_k sont deux à deux distincts, donc T_k est diagonalisable.

On conclut en utilisant $A = \lim_{k \rightarrow +\infty} A_k$, où $A_k = PT_kP^{-1}$.

d) On a $\dim C(A) = n^2 - \text{rg } \phi_A$.

Par a), pour ϕ au voisinage de ϕ_A dans $\mathcal{L}(\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))$, $\text{rg } \phi \geq \text{rg } \phi_A$.

Comme $B \mapsto \phi_B$ est continue (la matrice de ϕ_B dans la base canonique est fonction des coeff de B), alors $\text{rg } \phi_B \geq \text{rg } \phi_A$ pour B dans un voisinage V de A , c'est-à-dire $\dim C(B) \leq \dim C(A)$.

Or, par c), on peut trouver B diagonalisable dans V , donc par b), $\dim C(B) \geq n$. D'où $\dim C(A) \geq n$.