

1) Donner une CNS sur les a_i et b_i pour que $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & a_1 \\ 0 & \dots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_n \\ b_1 & \dots & b_n & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ soit diagonalisable.

2) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$, où $u_n = n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt$.

3) On considère $\forall x \geq 0, f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$.

a) Montrer que $f(x)$ est bien définie pour tout réel positif $x \geq 0$.

b) Pour $x > 0$, mettre $f(x)$ sous la forme $\cos(x)a(x) + \sin(x)b(x)$.

c) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

d) Montrer que f est de classe C^2 sur $]0, +\infty[$ et que $\forall x > 0, f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$.

e) On pose $\forall x > 0, g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-tx}}{1+t^2} dt$. Montrer que $\forall x > 0, g''(x) + g(x) = \frac{1}{x}$.

f) Montrer que $\forall x > 0, g(x) = f(x)$. En déduire $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$.

4) Soient $A \in S_n(\mathbb{R})$ et $a \in \mathbb{R}$ et $Z \in \mathbb{R}^n$. On pose $M = \left(\begin{array}{c|c} A & Z \\ \hline Z^T & a \end{array} \right)$.

On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A et $\mu_1 \leq \dots \leq \mu_{n+1}$ celles de M .

Montrer que $\mu_1 \leq \lambda_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \mu_{n+1}$.

Suggestion : Se ramener au cas où $A = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

On a alors (par calcul) : pour $x \notin \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$, x valeur propre de M ssi $x - a - \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{x - \lambda_i} = 0$.

On étudie $f(x) = x - a - \sum_{i=1}^n \frac{z_i^2}{x - \lambda_i}$ sur $\mathbb{R}$. De plus, si $z_i = 0$, alors λ_i est valeur propre de M .

Autre méthode : Utiliser le lemme suivant (hors-programme officiel) avec les vecteurs $Y = \begin{pmatrix} X \\ 0 \end{pmatrix}$:

Lemme : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ base de vecteurs propres de $u \in S(E)$ auto-adjoint, avec $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$.

Alors $\lambda_k = \inf_F \text{sev de dim } k \left(\sup_{x \in F, x \neq \vec{0}} \frac{\langle x, u(x) \rangle}{\|x\|^2} \right)$.

Indications/Corrigé

1) On calcule le polynôme caractéristique : on développe selon la première colonne et par récurrence, mais il vaut mieux utiliser la méthode du pivot en prenant x supposé non nul comme pivot : on retranche à la dernière colonne les précédentes multipliées par $-\frac{a_j}{x}$.

On obtient une matrice triangulaire inférieure dont le dernier coefficient diagonal est $-\frac{1}{x} \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

On obtient $\chi_M(x) = x^{n-1} \left(x - \frac{1}{x} \sum_{i=1}^n a_i b_i \right) = x^n - s x^{n-2}$, où $s = \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

La relation est vraie aussi en $x = 0$ (deux polynômes qui coïncident sur $\mathbb{C}^*$ sont égaux).

On note par ailleurs que $\text{rg } M \leq 2$, donc $\dim \text{Ker } M = \dim E_0 \geq n - 2$.

Premier cas : $s \neq 0$. La matrice M admet deux valeurs propres non nulles (les racines carrées de s).

La somme des dimensions des sev propres est donc $(n-2) + 1 + 1 = n$, donc M est diagonalisable.

Second cas : $s = 0$. Alors 0 est la seule valeur propre. Donc M est diagonalisable ssi $M = O_n$.

Remarque : On pourrait aussi déterminer les valeurs propres en cherchant une CNS sur λ pour qu'il existe une solution X non nul tel que $MX = \lambda X$. En supposant $\lambda \neq 0$, on obtient la CNS : $\lambda = \frac{1}{\lambda} \sum_{i=1}^n a_i b_i$.

2) On a $\int_{\varepsilon}^x \sin(t^n) dt = \frac{1}{n} \int_{\varepsilon}^{x^n} \frac{\sin(u)}{u^{1-1/n}} du$ par le changement de variable $t = u^n$ (bijection C^1 sur $[1, x]$).

Par IPP, $\int_{\varepsilon^n}^{x^n} \frac{\sin(u)}{u^{1-1/n}} du = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_{\varepsilon^n}^{x^n} \frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} du$.

On a $\frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} = o(1)$ en $u = 0$, et $\frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} = O_{+\infty} \left(\frac{1}{u^{2-1/n}} \right)$ et $2 - \frac{1}{n} > 1$.

Donc il existe $n \int_0^x \sin(t^n) dt = \left(1 - \frac{1}{n}\right) \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} du$.

On applique alors le th ITT (valable pour des fonctions intégrables) à $I_n = \int_1^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} du$.

Pour $n \geq 2$, on peut prendre $\varphi(u) = \frac{1 - \cos u}{u^{3/2}}$ comme fonction de domination.

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^{2-1/n}} du = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos u}{u^2} du$, d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \int_0^{+\infty} \sin(t^n) dt = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du$.

3) a) $\int_x^A \frac{\sin t}{x+t} dt = \int_x^A \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt$ qui converge absolument lorsque $A \rightarrow +\infty$. Donc $f(x) = \int_x^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt$.

b) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t-x)}{t} dt = \cos(x) \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt - \sin(x) \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$.

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt$.

On conclut en utilisant la fonction de domination $\varphi(t) = \frac{1 - \cos t}{t^2}$, intégrable sur $]0, +\infty[$.

d) *Première méthode* : On peut montrer que f est C^2 en utilisant $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos t}{(x+t)^2} dt$.

Posons $f(t, x) = \frac{\sin t}{x+t}$. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(t, x) = -\frac{\sin t}{(x+t)^2}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, x) = \frac{2 \sin t}{(x+t)^3}$.

Par deux IPP, on a $f''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{2 \sin t}{(x+t)^3} dt = \left[-\frac{\sin t}{(x+t)^2} \right]_0^{+\infty} + \left[-\frac{\cos t}{x+t} \right]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{x+t} dt$.

Donc $\forall x > 0$, $f''(x) + f(x) = \frac{1}{x}$.

Seconde méthode : On utilise a) et on dérive deux fois avec Leibniz.

On a notamment $\frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = -\frac{\sin x}{x}$ et $\frac{d}{dx} \int_x^{+\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt = -\frac{\cos x}{x}$.

e) Les théorèmes sur les intégrales paramétrées permettent de prouver que g est continue sur $[0, +\infty[$, de classe C^2 sur $]0, +\infty[$, et que $\forall x > 0$, $g''(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t^2 e^{-tx}}{1+t^2} dt$.

On a $\forall x > 0$, $g''(x) + g(x) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} dt = \frac{1}{x}$.

f) $y = (g - f)$ vérifie (E) : $y'' + y = 0$ sur $]0, +\infty[$, donc $y(x) = A \cos(x - \varphi)$.

D'autre part, $\lim_{+\infty} y = 0$, car $\lim_{+\infty} g = \lim_{+\infty} f = 0$. D'où $A = 0$, et ainsi $\forall x > 0$, $f(x) = g(x)$.

De plus, g est continue en 0 (par continuité des intégrales paramétrées avec domination par $\varphi(t) = \frac{1}{1+t^2}$).

Comme f est aussi continue en 0, on obtient bien $f(0) = g(0) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{\pi}{2}$.

4) Il existe $U \in O_n(\mathbb{R})$ telle que $U^T A U = D$. Avec $V = \left(\begin{array}{c|c} U & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array} \right)$, on obtient $V^T M V = \left(\begin{array}{c|c} D & Y \\ \hline Y^T & a \end{array} \right)$.

On se ramène aussi au cas où $A = D$ diagonale. On calcule, comme à l'exo 1), $\chi_M(x) = f(x) \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j)$.

On a $f'(x) > 0$ sur chaque intervalle de $\mathbb{R} \setminus \{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$. On obtient $n - r$ zéros distincts des λ_j , où r est le nombre de z_j non nuls. On traite ensuite le cas de λ_j lorsque z_j est nul.