

TD Oraux (préparation 2)

1) Une urne contient n boules blanches et p boules rouges.

On effectue des tirages successifs sans remise jusqu'à ce que toutes les boules rouges aient été tirées.

Calculer l'espérance du nombre N de boules blanches restantes.

2) Soit $\|\cdot\|$ une norme sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \|AB\| \leq c \|A\| \|B\|$.

3) Soient un entier $n \geq 2$, et X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$.

a) Montrer que si $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, E(X^k) = E(Y^k)$, alors $X \sim Y$ (c'est-à-dire X et Y ont même loi).

b) On suppose $\forall j \in \llbracket 0, n \rrbracket, P(Y = j) > 0$.

Montrer qu'il existe X de loi distincte de celle de Y telle que $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, E(X^k) = E(Y^k)$.

4) (X -ENS) a) Soit A une partie infinie de $\mathbb{N}^*$. On pose $a_n = \text{card}\{A \cap \llbracket 1, n \rrbracket\}$.

On suppose que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}, \exists j \in \mathbb{N}, A \cap \llbracket j, j+k \rrbracket = \emptyset$.

b) On prend désormais $A = \{2^p 3^q, (p, q) \in \mathbb{N}^2\}$. Montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

c) Montrer que $\sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \frac{1}{3}$.

d) Trouver un équivalent de a_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Indication : Considérer l'aire des triangles définis par $x \geq 0, y \geq 0, x \ln 2 + y \ln 3 = \ln n$.

5) Soit A et $B \in S_n(\mathbb{R})$ telles que $A^3 + A = B^3 + B$. Montrer que $A = B$.

Corrigé

1) On considère qu'on effectue les tirages jusqu'au bout, et on cherche le nombre de boules blanches qui sont tirées après les boules rouges (cela ne change rien au problème).

On considère par ailleurs que les boules ne sont pas numérotées (ce qui est possible). Les tirages correspondent donc à choisir une partie de p entiers parmi $(n+p)$ entiers, qui correspondent aux positions des boules rouges tirées. Pour $0 \leq k \leq n$, $P(N \geq k) = \frac{\binom{n-k+p}{p}}{\binom{n+p}{p}}$.

Donc par la formule de la crosse de hockey, $E(N) = \sum_{k=1}^n P(N \geq k) = \frac{\binom{n+p}{p+1}}{\binom{n+p}{p}} = \frac{n}{p+1}$.

Autre méthode : On considère que les boules blanches sont numérotées de 1 à n .

On a $N = \sum_{i=1}^n 1_{A_i}$, où A_i : "La boule de numéro i reste à la fin".

On a donc par linéarité $E(N) = \sum_{i=1}^n P(A_i)$. Il reste à prouver que $P(A_i) = \frac{1}{p+1}$.

Si on considère les $p+1$ boules constituées des boules rouges et de la boule blanche de numéro i , on cherche la probabilité que la boule blanche soit tirée en après les boules rouges.

La valeur de la dernière boule tirée suit une loi uniforme parmi les $(p+1)$ boules. D'où le résultat.

2) On a $\|AB\|_\infty \leq n \|A\|_\infty \|B\|_\infty$ en utilisant $(AB)_{ik} = \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{jk}$.

On conclut en utilisant l'équivalence des normes : on a $\alpha \|A\|_\infty \leq \|A\| \leq \beta \|A\|_\infty$, avec $\alpha > 0$.

$$\text{Donc } \|AB\| \leq \beta \|AB\|_\infty \leq \frac{\beta}{\alpha^2} \|A\| \|B\|.$$

Autre méthode : On note S la sphère unité pour la norme $\| \cdot \|$. L'application $f : S \times S \rightarrow \mathbb{R} \quad (A, B) \mapsto \|AB\|$ est continue comme composée de fonctions continues.

De plus, $S \times S$ est fermé borné dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C}) \times \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

Par le th des bornes atteintes, f est bornée par un réel c .

$$\text{Donc pour toutes } A \text{ et } B \text{ matrices non nulles, } \left\| \frac{A}{\|A\|} \right\| \left\| \frac{B}{\|B\|} \right\| \leq c, \text{ c'est-à-dire } \|AB\| \leq c \|A\| \|B\|.$$

3) a) On a $E(X^0) = 1 = E(Y^0)$, donc par linéarité $E(P(X)) = E(P(Y))$ pour tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

On prend pour $P(X)$ les polynômes de Lagrange L_j d'interpolation en $0, 1, 2, \dots, n$.

On a bien $\deg L_j \leq n$, donc $\forall j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, $P(X = j) = E(L_j(X)) = E(L_j(Y)) = P(Y = j)$.

$$\text{b) On pose } \begin{cases} a_j = P(X = j) \\ b_j = P(Y = j) \end{cases} \text{ et } m_k = E(Y^k). \text{ On considère le système } \begin{cases} \sum_{j=0}^n a_j = 1 \\ \forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket, \sum_{j=0}^n a_j j^k = m_j \end{cases},$$

Les n équations sont indépendantes (cf colonnes extraites d'une matrice inversible de Van der Monde).

Il y a $(n+1)$ inconnues (les a_j) et on connaît une solution particulière (les b_j).

Donc les solutions sont de la forme $a_j = b_j + \lambda c_j$, avec $\lambda \in \mathbb{R}$, où $(c_0, \dots, c_n)$ vecteur non nul.

On veut de plus que $a_j \geq 0$, ce qui est vérifié si λ est assez petit (car $b_j > 0$).

4) a) Soit $k \in \mathbb{N}$. On considère $N(j) = A \cap \llbracket j, j+k \rrbracket$.

Comme A est infini, il existe j_0 tel que $N(j_0) > 0$. Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$, on a $\lim_{j \rightarrow +\infty} N(j) = 0$.

De plus, $N(j+1) \geq N(j) - 1$. Donc il existe $j \geq j_0$ tel que $N(j) = 1$.

b) Si $2^p 3^q \leq n$, alors $p \leq \frac{\ln n}{\ln 2}$ et $q \leq \frac{\ln n}{\ln 3}$, donc $a_n \leq \frac{\ln n \ln n}{\ln 2 \ln 3}$, et a fortiori $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$.

$$\text{c) On a } \sum_{n \in A} \frac{1}{n} = \sum_{(p,q) \in \mathbb{N}^2} \frac{1}{2^p 3^q} = \left(\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \right) \left(\sum_{q=0}^{+\infty} \frac{1}{3^q} \right) = \frac{1}{1-1/2} \frac{1}{1-1/3} = 2.$$

On peut appliquer Fubini, car les termes sont positifs et la famille $\left(\frac{1}{2^p 3^q} \right)_{(p,q) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable.

d) On a $2^p 3^q \leq n$ ssi $p \ln 2 + q \ln 3 \leq \ln n$, donc $a_n = \text{card}\{(p, q) \in \mathbb{N}^2 \mid p \ln 2 + q \ln 3 \leq \ln n\}$.

Ainsi, en associant à chaque (p, q) le carré $[p, p+1] \times [q, q+1]$, on peut encadrer a_n par les aires des triangles définis par les équations $x \ln 2 + y \ln 3 = \ln n$ et $x \ln 2 + y \ln 3 = \ln n + (\ln 2 + \ln 3)$. Donc $a_n \sim \frac{1}{2} \frac{\ln n \ln n}{\ln 2 \ln 3}$.

5) $D = B^3 + B$ est diagonalisable dans une base orthonormée.

Il suffit donc de prouver qu'étant donnée une matrice diagonale $D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, l'équation $A^3 + A = D$ admet une unique solution $A \in S_n(\mathbb{R})$. Supposons $A^3 + A = D$.

Les matrices A et D commutent, donc les sev propres E_λ de D sont stables par A .

En considérant les restrictions de A aux E_λ (qui sont aussi symétriques), on se ramène donc à résoudre une équation de la forme $A^3 + A = \lambda I_n$.

Or, le polynôme annulateur $P(X) = X^3 + X - \lambda$ admet une unique racine réelle μ (faire une étude de fonction), donc A admet μ comme unique valeur propre. Comme A est diagonalisable, $A = \mu I_n$.

Ainsi, l'unique solution est la matrice $A = \text{Diag}(\mu_1, \dots, \mu_n)$, où $\mu_j^3 + \mu_j = \lambda_j$.