

TD Orlaux (préparation 1 bis, spécifique X-ENS)

1) (X) Montrer que $e = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ et $\lambda = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^{(n^2)}}$ sont irrationnels.

Indications : a) On a $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{a}{n!}$, où $a \in \mathbb{N}$.

On a $0 < e - S_n \leq \frac{e}{(n+1)!}$ donc $a < n! e < a + 1$, et ainsi $n!e \notin \mathbb{Z}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Si e était rationnel, il existerait $q \in \mathbb{N}^*$ tel que $qe \in \mathbb{Z}$, donc on aurait a fortiori $q!e \in \mathbb{Z}$.

b) On a $S_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{a}{2^{(n^2)}}$, où $a \in \mathbb{N}$ est impair.

On a $0 < \lambda - S_n < \frac{1}{2^{(n+1)^2}} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots\right) = \frac{2}{2^{(n+1)^2}}$. Donc $a < 2^{(n^2)}\lambda < a + 1$ pour n assez grand.

Autre argument : On peut montrer qu'un réel λ est rationnel ssi son développement (ici en base 2) est périodique à partir d'un certain rang. Or, le développement de λ est $0, \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dots$, avec $\varepsilon_k = 1$ si $\exists n \in \mathbb{N}^*, k = n^2$, et 0 sinon.

3) (X, ENS) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ni majorée ni minorée telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_{n+1} - u_n) = 0$.

Montrer que $\{u_n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Indication : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. Il existe n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |u_{n+1} - u_n| \leq \varepsilon$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas minorée, il existe $p \geq n_0$ tel que $u_p \leq x$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ n'est pas majorée, il existe $q \geq p$ tel que $x < u_q$.

Quand n décrit $\llbracket p, q \rrbracket$, on passe de u_p à u_q pas des pas $\leq \varepsilon$.

On considère $n = \max\{k \in \llbracket p, q-1 \rrbracket \mid u_k \leq x\}$. On a $u_n \leq x \leq u_{n+1}$, donc $x - \varepsilon < u_n \leq x$.

4) (X) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$.

Montrer que $\int_0^1 |f'(t) - f(t)| dt \geq e^{-1}$. La constante e^{-1} est-elle optimale ?

Indication : $f'(t) - f(t) = g'(t)e^{-t}$, où $g(t) = f(t)e^{-t}$. On a $g(0) = 0, g(1) = e^{-1}$.

On conclut avec $\int_0^1 |g'(t)e^{-t}| dt \geq \int_0^1 |g'(t)| dt \geq \left| \int_0^1 g'(t) dt \right| = e^{-1}$.

L'inégalité est stricte, mais e^{-1} est optimale : on considère une suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions croissante et de classe C^1 telle que $g_n(0) = 0, g_n(1) = e^{-1}$ et $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{[0,1]} g'_n(t) = 0$. Par exemple, $g_n(t) = e^{-1}(1 - (1-t)^n)$.

Remarque : L'idée est qu'il y a égalité lorsque g'_n cv (au sens des distributions) vers un Dirac en 0 de masse e^{-1} . La valeur e^{-1} n'est pas atteinte, mais est optimale (c'est une borne inférieure).

4) (X) Soit $\frac{1}{2} < x < 1$ et $0 \leq \alpha \leq \frac{1}{1-x}$. Montrer qu'il existe $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\sum_{n=0}^{+\infty} \varepsilon_n x^n = \alpha$.

Indication : On définit $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par récurrence forte : $\varepsilon_n = 1$ ssi $\sum_{k=0}^{n-1} \varepsilon_k x^k < \alpha$, et $\varepsilon_n = 0$ sinon.

On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^k \leq \alpha < \sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$.

Supposons la propriété vraie au rang n .

Si $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^k \leq \alpha < \sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^k + x^{n+1}$, alors $\varepsilon_{n+1} = 0$, et $x^{n+1} \leq \frac{x}{1-x} x^{n+1} = \sum_{k=n+2}^{+\infty} x^k$.

Sinon, $\sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^k + x^{n+1} \leq \alpha < \sum_{k=0}^n \varepsilon_k x^k + \sum_{k=n+1}^{+\infty} x^k$, donc $\varepsilon_{n+1} = 1$ et $\alpha < \sum_{k=0}^{n+1} \varepsilon_k x^k + \sum_{k=n+2}^{+\infty} x^k$.

5) (X) Montrer que $\{e^{in}, n \in \mathbb{N}\}$ est dense sur U .

Remarque : On en déduit que $\{\cos n, n \in \mathbb{N}\}$ est dense sur $[-1, 1]$.

Indication : Comme π irrationnel (admis), les complexes e^{in} , où $n \in \mathbb{N}$, sont deux à deux distincts : par le principe des tiroirs, on peut trouver des e^{in} arbitrairement près. Ainsi, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n > m$ tels que $|e^{in} - e^{im}| < \varepsilon$.

On en déduit $|e^{iq} - 1| \leq \varepsilon$, où $q = n - m$, et en considérant les $e^{ikq} = (e^{iq})^k$, avec $k \in \mathbb{N}$, on peut approcher à ε près tout point du cercle unité par un des e^{ikq} , où $k \in \mathbb{N}$.

6) (X) Soit $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Montrer qu'il existe un cercle tangent à la courbe de f en 0 et au-dessus de cette courbe.

Indication : Justifier qu'il existe λ tel que $f(x) \leq f(0) + f'(0)x + \lambda x^2$.

Considérer un cercle d'équation $y = f(0) + f'(0)x + \mu(x^2 + y^2)$.

7) (ENS) Soit $(z_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes tels que $|z_n - z_m| \geq 2$ pour tous $n \neq m$.

a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre $N(p)$ de n tel que $p \leq |z_n| < p + 1$ vérifie $N(p) \leq (p + 1)^2 - (p - 1)^2$.

b) Montrer que pour tout $\alpha > 2$, la série $\sum \frac{1}{1 + |z_n|^\alpha}$ converge.

Indications : a) Considérer la réunion des disques ouverts de centre z_n et de rayon 1, pour les $p \leq |z_n| < p + 1$.

Ces $N(p)$ disques ouverts sont disjoints et inclus dans la couronne de centre 0 délimité par les cercles de rayons $(p + 1)$ et $(p - 1)$. En considérant les aires, on a donc $N(p) \times \pi \leq \pi(p + 1)^2 - \pi(p - 1)^2$.

b) On regroupe par paquets selon la valeur de $p = \lfloor |z_n| \rfloor$. On a $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1 + |z_n|^\alpha} \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{N(p)}{1 + p^\alpha}$.

Or, $N(p) = O(p)$ par a). On en déduit que $N(p)p^{-\alpha} = O(p^{1-\alpha})$. Comme $\alpha - 1 > 1$, la série converge.

8) (ENS) Déterminer la nature de $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^2}$.

Indication : On pose $a_p = \sum_{n=p^2}^{(p+1)^2-1} \frac{1}{n^2}$, et on vérifie par encadrement que $a_p = \frac{2}{p} + O\left(\frac{1}{p^2}\right)$.

Donc la série des a_p converge. Posons $A_p = \sum_{k=1}^p a_k$.

Pour $p \leq \sqrt{n} < p + 1$, S_n est compris entre A_{p-1} et A_p . Par pincement, $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

9) (X) On considère $2n$ points du plan. Montrer qu'il existe une droite séparant (strictement) l'ensemble des points en deux ensembles de n points.

Indication : On considère une droite $D : x = a$, en faisant varier a . Le nombre $N(a)$ de points situés à gauche de D varie de 0 à $2n$. Si les points ont des abscisses distinctes, les sauts sont de une unité, donc il existe a tel que n points vérifient $x < a$ et n points vérifient $x > a$. On se ramène à cette situation en choisissant une direction distincte des pentes entre deux des $2n$ points (le nombre de directions à exclure est fini, donc il existe nécessairement une direction qui convient).

10) (X) On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne canonique.

On note D le disque unité. Existe-t-il une partition de D en deux parties A et B telles que A et B soient isométriques, c'est-à-dire qu'il existe une surjection $f : A \rightarrow B$ vérifiant $|f(x) - f(y)| = |x - y|$?

Indication : f est nécessairement injective, donc f est une bijection. Ainsi, f^{-1} est une bijection isométrique de B sur A . Quitte à permuter A et B , on peut supposer que A contient un triangle inscrit sur le cercle unité. Son image par f est aussi un triangle isométrique donc situé aussi sur le cercle unité. Ainsi, l'image du centre O est nécessairement O , ce qui contredit A et B disjoints.