

TD Orlaux (préparation 1)

1) Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ diagonalisable. Les questions suivantes sont indépendantes

a) On considère $u : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $u(M) = AM$. Montrer que u est diagonalisable.

b) On considère $v : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $v(M) = AMA$.

Montrer que v est diagonalisable et expliciter χ_v .

c) On considère $w : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $w(M) = AMA^T$.

Montrer que w est diagonalisable et que $\text{tr}(w) = (\text{tr } A)^2$.

Indications : a) On peut utiliser les polynômes annulateurs.

b) On ne peut pas utiliser la méthode du a). Mais on va se ramener au cas où A est diagonale :

on prend $v : \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ $m \mapsto a \circ m \circ a$ et une base $\mathcal{B}$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} a = D = \text{Diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

Noter alors que si $\text{Mat}_{\mathcal{B}} m = E_{ij}$, alors $\text{Mat}_{\mathcal{B}} v(m) = \lambda_i \lambda_j E_{ij}$.

c) Les méthodes de a) et b) ne fonctionnent pas.

Considérer $(X_1, \dots, X_n)$ base de vecteurs propres de A , et noter que $w(X_i X_j^T) = \lambda_i \lambda_j X_i X_j^T$.

2) On considère un graphe aléatoire de n sommets, où chaque arête existe avec une probabilité p .

On note N le nombre de triangles (i, j, k) inscrit dans le graphe, où $1 \leq i < j < k \leq n$.

a) b) Calculer $E(N)$ et $V(N)$.

c) Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\forall \varepsilon > 0$, $P(|N - \lambda n^3| \geq \varepsilon n^3) = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n} \right)$.

3) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ de classe C^∞ et bornée. On suppose $\exists p \in \mathbb{N}$, $f^{(p)}(0) \neq 0$.

On pose $\forall \lambda > 0$, $\varphi(\lambda) = \sup_{x \geq 0} (f(x) \exp(-\lambda x))$. Déterminer un équivalent de $\varphi(\lambda)$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

Conseil : Traiter d'abord le cas où $f(0) > 0$.

Corrigé

1) a) On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $u^k(M) = A^k M$, donc $\forall P \in \mathbb{C}[X]$, $P(u)(M) = P(A)M$.

Il existe P scindé à racines simples tel que $P(A) = O_n$. Donc $P(u) = 0$. Donc u est diagonalisable.

Autre solution : On a $AM = \lambda M$ ssi $\forall j$, $AM_j = \lambda M_j$.

Donc $\text{Ker}(u - \lambda \text{Id})$ est le sev des matrices M dont les n vecteurs colonnes appartiennent à $\text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

On en déduit que $\dim \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) = n \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n)$.

On en déduit que $\sum_{\lambda} \dim \text{Ker}(u - \lambda \text{Id}) = n^2$ ssi $\sum_{\lambda} \dim \text{Ker}(A - \lambda I_n) = n$.

Donc u est diagonalisable ssi A est diagonalisable.

b) On a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} v(m) = D (\text{Mat}_{\mathcal{B}} m) D$. Considérons $m_{ij} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} m_{ij} = E_{ij}$.

Donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}} v(m_{ij}) = DE_{ij}D = \lambda_i \lambda_j E_{ij}$. Les m_{ij} forment donc une base de vecteurs propres de $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$.

Donc v est diagonalisable, et $\chi_v(X) = \prod_{i,j} (X - \lambda_i \lambda_j)$.

Remarque : En appliquant cette méthode à a), on a $\text{Mat}_{\mathcal{B}} v(m_{ij}) = \lambda_i m_{ij}$, donc $\chi_v(X) = \chi_A(X)^n$.

c) *Remarque* : Dans tous les cas, on a $w(E_{ij}) = AE_i E_j^T A^T = A_i A_j^T = a_i a_j E_{ij} + \dots$,

donc $\text{tr}(u) = \sum_{i,j} a_i a_j = (\sum_{i=1}^n a_{ij})^2 = (\text{tr } A)^2$.

Il existe une base $(X_1, \dots, X_n)$ une base de diagonalisation de A . On a $w(X_i X_j^T) = \lambda_i \lambda_j X_i X_j^T$.

De plus, les $X_i X_j^T$ forment une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, donc est une base de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

En effet, supposons $\sum_{i,j} \alpha_{ij} X_i X_j^T = 0$. Comme $(X_1, \dots, X_n)$ libre, on obtient $\forall i, \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_j^T = 0$.

Donc $\forall i, \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} X_j = 0$, d'où $\forall (i, j), \alpha_{ij} = 0$.

Donc w diagonalisable et $\text{tr } w = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j = (\sum_{i=1}^n \lambda_i)^2$.

2) a) On numérote les sommets de 1 à n . On note X_{ij} la v.a de Bernoulli associée à l'arête (i, j) .

On note $Z_{ijk} = X_{ij} X_{ik} X_{jk}$ la v.a. associée au triangle (i, j, k) , où i, j, k distincts. On a Z_{ijk} de loi $\mathcal{B}(p^3)$.

On a $N = \sum_{i < j < k} 1_{ijk \text{ triangle}} = \sum_{i < j < k} X_{ij} X_{ik} X_{jk}$. Donc $E(N) = \sum_{i < j < k} E(X_{ij} X_{ik} X_{jk})$.

Donc $E(N) = p^3 \binom{n}{3}$.

b) On a $V(Z_{ijk}) = p^3(1 - p^3)$ et $\text{Cov}(Z_{ijk}, Z_{i'j'k'}) = 0$ si (i, j, k) et (i', j', k') n'ont pas d'arête commune.

Sinon, on a $\text{Cov}(Z_{ijk}, Z_{ijl}) = E(X_{ij} X_{ik} X_{jk} X_{il} X_{jl}) - E(X_{ij} X_{ik} X_{jk}) E(X_{ij} X_{il} X_{jl}) = p^5 - p^6$.

Il y a $\binom{n}{2} \times (n-2)(n-3)$ couples de triangles distincts ayant une arête commune.

Donc $V(N) = \binom{n}{3} \times p^3(1 - p^3) + \binom{n}{2} \times (n-2)(n-3) \times (p^5 - p^6) = O(n^3)$.

c) On a $P(|N - \lambda n^3| > \varepsilon n^3) = P((N - \lambda n^3)^2 \geq \varepsilon^2 n^6) \leq \frac{E((N - \lambda n^3)^2)}{\varepsilon^2 n^6}$.

On a $E((N - \lambda n^3)^2) = V(N) + (E(N) - \lambda n^3)^2$. On a $E(N) \sim \frac{n^3 p^3}{6}$. On prend $\lambda = \frac{p^3}{6}$.

On a donc $V(N) + (E(N) - \lambda n^3)^2 = O_{+\infty}(n^3) + O_{+\infty}(n^5) = O_{+\infty}(n^5)$, car $\binom{n}{3} - \frac{n^3}{6} = O_{+\infty}(n^5)$.

3) On peut conjecturer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\lambda) = f(0)$. On peut donc déjà considérer le cas $f(0) > 0$.

Premier cas : $f(0) > 0$. Posons $M = \sup f$. On a $f(0) \leq \varphi(\lambda) \leq M$.

Soit $\varepsilon > 0$. On va montrer que $\varphi(\lambda) \leq f(0) + \varepsilon$ pour λ assez grand.

Or, il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in [0, a], f(x) \leq f(0) + \varepsilon$, donc $\sup_{x \in [0, a]} (f(x) e^{-\lambda x}) \leq f(0) + \varepsilon$.

On en déduit que $\varphi(\lambda) \leq \max(f(0) + \varepsilon, M e^{-\lambda a}) = f(0) + \varepsilon$ pour λ assez grand.

Cas général : On considère $p = \min\{k \mid f^{(k)}(0) \neq 0\}$. On a $f(x) \sim g(x) = \frac{x^p}{p!}$.

- On va montrer que $\varphi(\lambda) \sim \psi(\lambda) = \sup_{x \geq 0} (g(x) e^{-\lambda x}) = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} \sup_{x \geq 0} (y^p e^{-y})$.

Ce qui permettra de conclure car $\sup_{x \geq 0} (x^p e^{-\lambda x}) = \frac{1}{\lambda^p} p^p e^{-p}$, d'où $\psi(\lambda) = \frac{K}{\lambda^p}$, où $K = \frac{f^{(p)}(0)}{p!} p^p e^{-p}$.

- Soit $\varepsilon \in]0, 1[$. Il existe $a > 0$ tel que $\forall x \in [0, a], (1 - \varepsilon)g(x) \leq f(x) \leq (1 + \varepsilon)g(x)$.

Donc $(1 - \varepsilon) \sup_{x \in [0, a]} (g(x) e^{-\lambda x}) \leq \sup_{x \in [0, a]} (f(x) e^{-\lambda x}) \leq (1 + \varepsilon) \sup_{x \in [0, a]} (g(x) e^{-\lambda x}) \leq (1 + \varepsilon) \psi(\lambda)$.

D'où $\varphi(\lambda) \leq \max((1 + \varepsilon)\psi(\lambda), Me^{-\lambda a}) = (1 + \varepsilon)\psi(\lambda)$ pour λ assez grand, car $e^{-\lambda a} = o_{+\infty}\left(\frac{1}{\lambda^p}\right)$.

D'autre part, $\sup_{x \in [0, a]}(f(x)e^{-\lambda x}) \geq (1 - \varepsilon) \sup_{x \in [0, a]}(g(x)e^{-\lambda x})$.

On vérifie aisément (par étude de fonction) que $\sup_{x \in [0, a]}(g(x)e^{-\lambda x}) = \psi(\lambda)$ pour λ assez grand.

On a donc $\varphi(\lambda) \geq (1 - \varepsilon)\psi(\lambda)$ pour λ assez grand.

On en conclut que pour λ assez grand, $(1 - \varepsilon)\psi(\lambda) \leq \varphi(\lambda) \leq (1 + \varepsilon)\psi(\lambda)$.