TD Oraux : Séries (bis)

Rappel : On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on a $S_{pn} - S_n = \sum_{k=n+1}^{pn} a_k$.

Si $\sum a_n$ converge, alors $(S_{pn} - S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 lorsque $n \to +\infty$.

1) (X MP) Soit une bijection $\sigma : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire σ permutation de $\mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $\sum \dfrac{1}{n\sigma(n)}$ converge.

b) Montrer que $\sum \dfrac{\sigma(n)}{n}$ diverge.

Indication : Noter que $\mathrm{card}\{k \in [\![n+1, 3n]\!] \mid \sigma(k) \geq n\} \geq n$.

2) (X PC) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite réelle **positive** telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq \dfrac{1}{n^2}$.

Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.

3) (X PC) Montrer que la série $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

Corrigé

1) a) On a $\dfrac{1}{n\sigma(n)} \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{1}{\sigma(n)^2}\right)$, et on conclut avec $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{\sigma(n)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2} < +\infty$.

(*Remarque* : en fait, on a seulement besoin de l'inégalité $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sigma(k)^2} \leq \sum_{j=1}^{+\infty} \dfrac{1}{j^2}$).

2) On peut noter d'abord que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est majorée, car $u_n \leq u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2} \leq u_1 + \dfrac{\pi^2}{6}$.

Posons $a_n = u_{n+1} - u_n$ et $a_n^+ = \begin{cases} a_n \text{ si } a_n \geq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$ et $a_n^- = \begin{cases} -a_n \text{ si } a_n \leq 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

On a donc $u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^{n} (a_k)^+ - \sum_{k=1}^{n} (a_k)^-$.

De plus, par hypothèse, $(a_n)^+ \leq \dfrac{1}{n^2}$. Donc $\sum_{k=1}^{n} (a_k)^+ \leq \dfrac{\pi^2}{6}$.

Comme $u_{n+1} \geq 0$, alors $\sum_{k=1}^{n} (a_k)^- \leq u_1 + \sum_{k=1}^{n} (a_k)^+ \leq u_1 + \dfrac{\pi^2}{6}$, et ainsi $\sum (a_n^-)$ converge.

Ainsi, $\sum a_k$ converge comme différence de deux séries convergentes. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, où $a_k = \dfrac{\sin(\ln k)}{k}$.

On va utiliser le fait qu'il existe de grandes séries de nombres de termes consécutifs $a_k \geq \dfrac{1}{2k}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On considère $\Delta_p = \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \dfrac{\pi}{3} + 2p\pi \leq \ln k \leq \dfrac{2\pi}{3} + 2p\pi \right\}$.

Pour $k \in \Delta_p$, on a $a_k \geq \dfrac{1}{2k}$, donc

$$\sum_{n\in\Delta_p} a_k \geq \frac{\mathrm{card}\,\Delta_p}{2\max\Delta_p}$$

Or, $\mathrm{card}\,\Delta_p \geq \left(\exp\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2p\pi\right) - \exp\left(\dfrac{\pi}{3} + 2p\pi\right) - 1\right) \sim (e^{2\pi/3} - e^{\pi/3}) \exp(2p\pi)$.

Et $\max\Delta_p \sim e^{2\pi/3}\exp(2p\pi)$. Donc il existe $\mu > 0$ tel que pour tout p assez grand, $\sum_{n\in\Delta_p} a_k \geq \mu$.

Donc a fortiori $\left(\sum_{n\in\Delta_p} a_k\right)_{p\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Or, si $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergeait, on aurait $\lim_{p\to+\infty} \sum_{n\in\Delta_p} a_k = 0$, car $\sum_{n\in\Delta_p} a_k = S_{\max\Delta_p} - S_{(\min\Delta_p)-1}$.