

0) Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ une base de E .

Expliciter une base $(m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ de $L(E)$ telle que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad m_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$$

c'est-à-dire $m_{ij}(e_j) = e_i$ et $\forall k \neq j, m_{ij}(e_k) = \vec{0}$.

1) ($\clubsuit$) (*extrait Mines*) Soit $A \in \mathcal{M}_n(K)$. On considère $f : \mathcal{M}_n(K) \rightarrow \mathcal{M}_n(K) \quad M \mapsto AM$.

a) Calculer $f(E_{ij})$. *Indication* : On pourra commencer par écrire $A = \sum_{k,l} a_{kl} E_{kl}$.

b) En déduire qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de $\mathcal{M}_n(K)$ telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}} f = \begin{pmatrix} A & O_n & O_n \\ O_n & \ddots & O_n \\ O_n & O_n & A \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n^2}(K)$.

2) (*Mines*) Soient $A \in \mathcal{M}_{3,2}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$ telles que $(AB)^2 = AB$ et $\text{rg } AB = 2$.

Déterminer $\text{rg } A$ et $\text{rg } B$, et montrer que $BA = I_2$.

3) ($\clubsuit$) (*X*) *Lemme de factorisation*

Soient $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $w \in \mathcal{L}(E, G)$ Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $\text{Ker } u \subset \text{Ker } w$

(ii) Il existe $v \in \mathcal{L}(F, G)$ telle que $w = v \circ u$

Remarque : Pour prouver (i) $\implies$ (ii), une méthode possible consiste à considérer une base $\mathcal{B}$ de E et une base $\mathcal{C}$ de F telle que $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$, où $M \in GL_r(K)$ inversible (cf cours).

4) ($\star$) Soient $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Rappel : $\det \left(\begin{array}{c|c} N & * \\ \hline 0 & \alpha \end{array} \right) = \alpha \det N$, donc la matrice est inversible si N inversible et α non nul.

a) Soit $x_n \in \mathbb{R}$ tel que $f_n(x_n) \neq 0$. Pour tout $j \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$, on pose $g_j = f_j - \lambda_j f_n$, où $\lambda_j = \frac{f_j(x_n)}{f_n(x_n)}$.

Montrer que $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre ssi $(g_1, \dots, g_{n-1})$ est libre.

b) Montrer (par récurrence sur n) que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $(f_1, \dots, f_n)$ est libre

(ii) il existe $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $M = (f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$

TD Oaux. Corrigé

0) La condition $m_{ij}(e_k) = \delta_{jk} e_i$ équivaut à $\text{Mat}_{\mathcal{B}} m_{ij} = E_{ij}$.

Comme $\varphi : u \mapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}} u$ est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(K)$, il suffit donc de prendre pour m_{ij} l'endomorphisme de E tel que $\varphi(m_{ij}) = E_{ij}$, c'est-à-dire $m_{ij} = \varphi^{-1}(E_{ij})$.

Comme l'image d'une base par φ^{-1} est une base, $(m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n}$ est bien une base de $\mathcal{L}(E)$.

1) a) On a $f(E_{ij}) = ME_{ij} = \sum_{k,l} a_{kl} E_{kl} E_{ij} = \sum_{k,l} a_{kl} \delta_{li} E_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ki} E_{kj}$.

b) On se place dans la base $\mathcal{B} = (E_{i1})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i2})_{1 \leq i \leq n} \cup (E_{i3})_{1 \leq i \leq n} \cup \dots \cup (E_{in})_{1 \leq i \leq n}$.

Comme $\text{rg}(AB) \leq \min(\text{rg } A, \text{rg } B)$, alors $\text{rg } A = \text{rg } B = 2$.

Donc A est injective et B surjective. Or, on a $A(BA)B = AB$.

Comme A est injective, alors $(BA)B = B$, car $AX = AY$ implique $X = Y$.

Comme B est surjective, alors $BA = I_2$, car $\forall X \in \mathbb{R}^3$, $(BA)(BX) = (BX)$ et BX décrit $\mathbb{R}^2$.

3) (ii) $\implies$ (i) : Si $w = v \circ u$, alors $\text{Ker } u \subset \text{Ker } w$: en effet, $u(x) = 0$ implique $v(u(x)) = 0$.

(i) $\implies$ (ii) : Supposons $\text{Ker } u \subset \text{Ker } w$.

Première méthode (matricielle) :

On considère une base $\mathcal{B}$ adaptée à $E = S \oplus \text{Ker } u$, et une base $\mathcal{C}$ adaptée à $F = \text{Im } u \oplus T$.

On considère aussi une base $\mathcal{D}$ de G .

On a donc $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}} u = \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array} \right)$, avec $M \in GL_r(K)$ inversible.

On pose $\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}} v = \left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ et on a aussi $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{D}} w = \left(\begin{array}{c|c} N & O \end{array} \right)$, car $\text{Ker } u \subset \text{Ker } w$.

Le problème se ramène donc à chercher $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right)$ telle que $\left(\begin{array}{c|c} A & B \end{array} \right) \left(\begin{array}{c|c} M & O \\ \hline O & O \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} N & O \end{array} \right)$.

On obtient uniquement $AM = N$, c'est-à-dire $A = M^{-1}N$, et B est arbitraire. Donc v existe.

Seconde méthode : On considère une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_r, e_{r+1}, \dots, e_n)$ adaptée à $E = S \oplus \text{Ker } u$.

On a $(u(e_1), \dots, u(e_r))$ base de $\text{Im } u$, qu'on complète en une base $(u(e_1), \dots, u(e_r), f_1, \dots, f_p)$ de F .

On définit alors $\forall j \in \llbracket 1, r \rrbracket$, $v(u(e_j)) = w(e_j)$, et on définit $v(f_j)$ de façon arbitraire.

On vérifie alors que $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $v(u(e_j)) = w(e_j)$, car pour $j > r$, $u(e_j) = w(e_j) = 0$.

Deux applications linéaires qui coïncident sur une base sont égales, donc $v \circ u = w$.

4) a) Par transvection, $\text{rg}(f_1, f_2, \dots, f_n) = \text{rg}(f_1 - \lambda_1 f_n, \dots, f_{n-1} - \lambda_{n-1} f_n, f_n) = \text{rg}(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, f_n)$.

Ainsi, $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ est libre ssi $(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, f_n)$ est libre.

On a $f_n \notin \text{Vect}(g_1, \dots, g_{n-1})$, car $f_n(x_n) = 0$ et $\forall j < n$, $g_j(x_n) = 0$.

Or, une famille est libre ssi aucun vecteur n'est combinaison linéaire des précédents.

On en déduit que $(g_1, g_2, \dots, g_{n-1}, f_n)$ est libre ssi $(g_1, g_2, \dots, g_{n-1})$ est libre.

b) Montrons (ii) $\implies$ (i) : Supposons $M = (f_j(x_i))_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n} \in GL_n(\mathbb{R})$.

Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j = 0$, c'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(x) = 0$.

En prenant la valeur en chaque x_i , on obtient le système linéaire $MX = 0$, avec $X = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$.

Comme M est inversible, alors $X = 0$, c'est-à-dire $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (0, \dots, 0)$.

Montrons (i) $\implies$ (ii) : On raisonne par récurrence sur n .

La propriété est immédiate pour $n = 1$, car : (f_1) libre ssi f_1 non nulle, donc ssi $\exists x_1$, $f(x_1) \neq 0$.

Supposons que $(f_1, \dots, f_n)$ est libre, avec $n \geq 2$.

A fortiori, f_n n'est pas nulle, donc il existe x_n tel que $f_n(x_n) \neq 0$.

On considère alors $g_n = f_n$ et $\forall j \leq n-1$, $g_j = f_j - \lambda_j f_n$, où $\lambda_j = \frac{f_j(x_n)}{f_n(x_n)}$. On a $\forall j \leq n-1$, $g_j(x_n) = 0$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $(x_1, \dots, x_{n-1})$ tels que $N = (g_j(x_i))_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1} \in GL_{n-1}(\mathbb{R})$.

Donc $(g_j(x_i))_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1} = \left(\begin{array}{c|c} N & * \\ \hline 0 & f_n(x_n) \end{array} \right)$ est inversible, car $f_n(x_n) \neq 0$.

On passe à $(f_i(x_i))_{1 \leq i \leq n}$ en ajoutant, pour $2 \leq i \leq n$, à la i -ième ligne la première multipliée par λ_i .