

1) (*Centrale*) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$. On pose

$$E = \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \text{ converge} \right\} \quad \text{et} \quad F = \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s} \text{ converge absolument} \right\}$$

On définit $\sigma_c(f) = \inf E$ (si $E = \emptyset$, $\sigma_c(f) = +\infty$; si $E = \mathbb{R}$, $\sigma_c(f) = -\infty$) et $\sigma_a(f) = \inf F$.

a) Déterminer $\sigma_c(f)$ et $\sigma_a(f)$ dans les deux cas : (i) $f(n) = \frac{1}{2^n}$; (ii) $f(n) = \frac{(-1)^n}{n^r}$ où $r \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que : $\sigma_c(f) \leq \sigma_a(f)$, et que cette inégalité est optimale.

c) Montrer que $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$, et que ces inégalités sont optimales.

2) (*Mines*) Soit $\alpha \geq 0$.

Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n + \frac{\exp(-u_n)}{n^\alpha}$.

3) (*Centrale*) On considère $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

Montrer que $u_n = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o_{+\infty}(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) (*X*) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_{n+1} - \frac{1}{2} v_n \right) = \frac{1}{2}$. Montrer que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1.

5) (*extraits écrit X 2022 et oral X 2024*)

Soit $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe dans chacun des trois cas suivants :

a) f est continue

b) f est croissante

c) (★) f est continue par morceaux et il existe g continue telle que $f + g$ est croissante.

Énoncés supplémentaires

6) On note $\ln$ le logarithme népérien et $\log$ le logarithme en base 2.

a) Montrer que la série $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}$ diverge.

b) Soit $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 . Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left| f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$.

c) (*X*) (★) Montrer que la série $\sum \frac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

7) (*X*) (★) Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite réelle **positive** telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n^2}$.

Montrer que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge.

TD Oaux n°4. Corrigé

1) a) (i) $\frac{f(n)}{n^s} = \frac{1}{n^s 2^n} = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$, donc converge absolument dans tous les cas et $\sigma_c(f) = \sigma_a(f) = +\infty$.

(ii) $\frac{f(n)}{n^s} = \frac{(-1)^n}{n^{r+s}}$ et la série converge $\sum_{n \geq 1} \frac{f(n)}{n^s}$ ssi $r + s > 0$ et converge absolument ssi $r + s > 1$.
Donc $\sigma_c(f) = -r$ et $\sigma_a(f) = 1 - r$.

b) On a $F \subset E$ (car cv absolue implique cv), donc $\inf E \leq \inf F$, c'est-à-dire $\sigma_c(f) \leq \sigma_a(f)$.

- Pour l'optimalité, il suffit de prendre $f(n) \in \mathbb{R}^+$, par exemple $f(n) = 1$: on a $\sigma_c(f) = \sigma_a(f) = 1$.

c) Si $\sum a_n$ converge et si $\sum b_n$ converge absolument, alors $\sum a_n b_n$ converge absolument.

En effet, $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 0$ et de ce fait, $a_n b_n = O(b_n)$.

On prend ici $a_n = \frac{f(n)}{n^s}$ et $b_n = \frac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, avec $\varepsilon > 0$.

Ainsi, si $s \in E$, alors $s + 1 + \varepsilon \in F$, donc $E \subset (F - (1 + \varepsilon))$, d'où $\sigma_a(f) - (1 + \varepsilon) \leq \sigma_a(f)$.

Donc $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'où $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$ en faisant tendre ε vers 0.

- Pour l'optimalité, on considère $f(n) = (-1)^n$: on a bien $\sigma_c(f) = 0$ et $\sigma_a(f) = 1$.

2) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge ou tend vers $+\infty$.

- Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, alors $\lambda = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n > 0$, d'où $u_{n+1} - u_n \sim \frac{\lambda}{n^\alpha}$.

Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge, la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, donc on a nécessairement $\alpha > 1$.

- Réciproquement, si $\alpha > 1$, alors $u_{n+1} - u_n \leq \frac{1}{n^\alpha}$. Donc $\sum (u_{n+1} - u_n)$ converge, et ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

3) On procède par évaluations *successives de plus en plus fines* : un DA de u_n donne un DA de u_{n+1} .

- On a $\sqrt{x} \leq 1 + x$, donc $u_{n+1} \leq 1 + n + u_n$, donc $u_n = O(n^2)$. Donc $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} = O(n)$.

- Donc $u_n = O(n)$. Et $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} = O(\sqrt{n})$. Ainsi, $u_n = O(\sqrt{n})$ et a fortiori $u_n = o(n)$.

- D'où $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} = \sqrt{n} \sqrt{1 + o(1)} = \sqrt{n} (1 + o(1)) = \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \sim \sqrt{n}$.

Comme $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$, alors $u_n \sim \sqrt{n}$. c'est-à-dire $u_n = \sqrt{n} + o(\sqrt{n})$.

- Donc $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{1/2} = \sqrt{n} \left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

Comme $\sqrt{n-1} = \sqrt{n} + o(1)$, alors $u_n = \sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + o(1) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + o(1)$.

- *Remarque* : On pourrait naturellement poursuivre le DA.

4) En posant $w_n = v_n - 1$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n\right) = 0$. On pose $u_n = w_{n+1} - \frac{1}{2}w_n$.

On a par télescopes : $w_n - \frac{1}{2^n}w_0 = u_{n-1} + \frac{1}{2}u_{n-2} + \frac{1}{4}u_{n-3} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}}u_0$.

Via une preuve de type Césàro (pincement avec ε), on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$:

Soit $\varepsilon > 0$. Pour $k \geq p$ assez grand, $|u_k| \leq \varepsilon$.

On obtient alors $|w_n| \leq \frac{1}{2^n}|w_0| + \varepsilon \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-p}}\right) + \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^p 2^k |u_k| \leq 2\varepsilon + O\left(\frac{1}{2^n}\right)$.

Donc pour n assez grand, $|w_n| \leq 3\varepsilon$. Comme ε est arbitraire, $\lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0$.

5) (*extrait écrit X 2022 et oral X 2024*)

a) On applique le TVI à $g(x) = f(x) - x$. On a g continue et $g(0) \geq 0$ et $g(1) \leq 0$.

b) On considère $\lambda = \sup A$, où $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$, qui existe car $0 \in A$.

- On a $f(\lambda) \leq \lambda$: immédiat si $\lambda = 1$, et sinon, pour tout $x > \lambda$, $f(x) < x$.

On conclut par limite à droite : $f(\lambda) \leq \lim_{x \rightarrow \lambda, x > \lambda} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow \lambda, x > \lambda} x = \lambda$.

- On a $f(\lambda) \geq \lambda$: Immédiat si $\lambda \in A$, et sinon λ est limite par défaut d'une suite d'éléments de A : on a $f(a_n) \geq a_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lambda^-$, et on conclut par limite à gauche.

c) Le raisonnement du b) convient, car f admet aussi des limites à droite et à gauche en tout point :

Comme $f + g$ est croissante, on a $(f + g)(\lambda) \leq \lim_{x \rightarrow \lambda, x < \lambda} (f + g)(x)$.

Comme g est continue, on a $g(\lambda) = \lim_{x \rightarrow \lambda, x < \lambda} g(x)$. On en déduit $f(\lambda) \leq \lim_{x \rightarrow \lambda, x > \lambda} f(x)$.

De même, on a $\lim_{x \rightarrow \lambda, x < \lambda} f(x) \leq f(\lambda)$.

6) a) Posons $S(n) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k$, où $a_k = \frac{(-1)^{\lfloor \log k \rfloor}}{k}$.

Pour $2^p \leq k < 2^{p+1}$, on a $(-1)^{\lfloor \log k \rfloor} = (-1)^p$, donc $\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} a_k = (-1)^p \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k}$.

Comme $\sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \frac{1}{k} \geq \frac{2^{p+1} - 2^p}{2^{p+1}} = \frac{1}{2}$, alors $|S(2^{p+1}) - S(2^p)| \geq \frac{1}{2}$.

Or, si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait, on aurait $\lim_{p \rightarrow +\infty} (S(2^{p+1}) - S(2^p)) = 0$. Donc la série diverge.

b) On peut déduire la propriété de la formule de Taylor-Lagrange.

Preuve directe par IPP : $\int_n^{n+1} f(t) dt = [(n-1+t) f(t)]_n^{n+1} - \int_n^{n+1} (n-1+t) f'(t) dt$.

Donc $|f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt| \leq \int_n^{n+1} (n-1+t) |f'(t)| dt \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt$, car $0 \leq n-1+t \leq 1$.

c) On pose $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$, où $a_k = \frac{\sin(\ln k)}{k}$.

Première preuve :

On utilise b), avec $f(t) = \frac{\sin(\ln t)}{t}$. On vérifie que $f'(t) = O_{+\infty} \left(\frac{1}{t^2} \right)$.

On a $|f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)| dt = O_{+\infty} \left(\frac{1}{n^2} \right)$.

Donc la série $\sum \left(f(n) - \int_n^{n+1} f(t) dt \right)$ converge. Or, $\int_1^n f(t) dt = \int_1^n \frac{\sin(\ln t)}{t} dt = [\cos(\ln t)]_1^n$.

On peut montrer que la suite $(\cos(\ln n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge. On en déduit que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ diverge.

Seconde preuve :

On va utiliser le fait qu'il existe de grandes séries de nombres de termes consécutifs $a_k \geq \frac{1}{2k}$.

Soit $p \in \mathbb{N}$. On considère $\Delta_p = \left\{ k \in \mathbb{N}^* \mid \frac{\pi}{3} + 2p\pi \leq \ln k \leq \frac{2\pi}{3} + 2p\pi \right\}$.

Pour $k \in \Delta_p$, on a $\sin(\ln k) \geq \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, d'où $a_k \geq \frac{1}{2k}$, et ainsi $\sum_{n \in \Delta_p} a_k \geq \frac{\text{card } \Delta_p}{2 \max \Delta_p} \cdot \sum_{n \in \Delta_p} a_k \geq \frac{\text{card } \Delta_p}{2 \max \Delta_p}$.

Or, $\text{card } \Delta_p \geq \left(\exp\left(\frac{2\pi}{3} + 2p\pi\right) - \exp\left(\frac{\pi}{3} + 2p\pi\right) - 1 \right) \sim (e^{2\pi/3} - e^{\pi/3}) \exp(2p\pi)$.

Et $\max \Delta_p \sim e^{2\pi/3} \exp(2p\pi)$. Donc il existe $\mu > 0$ tel que pour tout p assez grand, $\sum_{n \in \Delta_p} a_k \geq \mu$.

Donc a fortiori $\left(\sum_{n \in \Delta_p} a_k \right)_{p \in \mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.

Or, si $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergeait, on aurait $\lim_{p \rightarrow +\infty} \sum_{n \in \Delta_p} a_k = 0$, car $\sum_{n \in \Delta_p} a_k = S_{\max \Delta_p} - S_{(\min \Delta_p)-1}$.

7) On peut noter d'abord que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est majorée, car $u_n \leq u_1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k^2} \leq u_1 + \frac{\pi^2}{6}$.

Posons $a_n = u_{n+1} - u_n$ et $a_n^+ = \begin{cases} a_n & \text{si } a_n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et $a_n^- = \begin{cases} -a_n & \text{si } a_n \leq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

On a donc $u_{n+1} = u_1 + \sum_{k=1}^n (a_k)^+ - \sum_{k=1}^n (a_k)^-$.

De plus, par hypothèse, $(a_n)^+ \leq \frac{1}{n^2}$. Donc $\sum_{k=1}^n (a_k)^+ \leq \frac{\pi^2}{6}$.

Comme $u_{n+1} \geq 0$, alors $\sum_{k=1}^n (a_k)^- \leq u_1 + \sum_{k=1}^n (a_k)^+ \leq u_1 + \frac{\pi^2}{6}$, et ainsi $\sum (a_n)^-$ converge.

Ainsi, $\sum a_k$ converge comme somme de deux séries convergentes. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.