

1) (*inspiré du sujet écrit X 2023*)

On note  $E$  l'ensemble des fonctions continues  $f$  définies de  $[0, 1]$  dans  $\mathbb{R}$  et vérifiant

$$\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_0^1 f(x) \, dx = 1$$

Soient  $f$  et  $g \in E$ . On pose  $\forall x \in [0, 1], \quad \langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x) \, dx$  et  $\|g\|_\infty = \sup_{[0,1]} |g|$ .

a) Soient  $g_1$  et  $g_2 \in E$ . Montrer que  $|\langle f, g_1 \rangle - \langle f, g_2 \rangle| \leq \|g_1 - g_2\|_\infty$ .

Soit  $f \in E$ . On suppose qu'il existe  $c > 0$  tel que  $\forall x \in [0, 1], \quad f(x) \geq c$ .

b) Montrer que  $c \leq 1$ .

c) Soient  $f, g_1$  et  $g_2 \in E$ . Montrer que  $|\langle f, g_1 \rangle - \langle f, g_2 \rangle| \leq (1 - c) \|g_1 - g_2\|_\infty$ .

2) (*oral ENS*) (★) Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul de degré  $d$ . On pose  $\|P\|_\infty = \sup_{z \in U} |P(z)|$ .

On définit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $P_0 = P$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = (XP'_n)^2$ .

a) Montrer que  $\|XP'_n\|_\infty \leq d^{3/2} \|P\|_\infty$ .

b) Montrer que pour  $\|P\|_\infty$  assez petit, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\|_\infty = 0$ .

1) bis) c) *Indication* : En comparant les énoncés de a) et c), l'idée est de chercher à se ramener à la situation du a), mais où 1 devient  $1 - c$ , ce qui amène à considérer  $F = f - c \geq 0$ . On a  $\int_0^1 F = 1 - c$ .

2) bis) **Enoncé détaillé**

Soit  $P \in \mathbb{C}[X]$  non nul de degré  $d$ . On pose  $\|P\|_\infty = \sup_{z \in U} |P(z)|$ .

a) On pose  $P(X) = a_0 + a_1X + \dots + a_dX^d$ .

(i) Montrer que  $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |P(e^{i\theta})|^2 \, d\theta = \sum_{k=0}^d |a_k|^2$ .

(ii) En déduire  $\|XP'_n\|_\infty \leq d \sum_{k=1}^d |a_k| \leq d^{3/2} \|P\|_\infty$ .

b) Soient  $K > 0$  et  $\lambda > 1$ .

Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle strictement positive vérifiant  $u_0 > 0$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq K \lambda^n (u_n)^2$ .

En posant  $v_n = \lambda^n u_n$ , montrer que pour  $u_0$  assez petit,  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$ .

c) (*oral X*) On définit  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$  par  $P_0 = P$  et  $\forall n \in \mathbb{N}, P_{n+1} = (XP'_n)^2$ .

Montrer que pour  $\|P\|_\infty$  assez petit, on a  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|P_n\|_\infty = 0$ .