TD Oraux : Polynômes

1) Soit $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - a_k)$ un polynôme réel, unitaire et scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

On peut supposer $a_1 < a_2 < ... < a_n$.

On sait par le cours que P' est scindé à racines simples, et on note $b_1 < ... < b_{n-1}$ ses racines.

Dans la suite, on veut montrer par différentes méthodes différentes que $Q = P' - P$ est scindé à racines simples.

a) *Première méthode* : Donner le signe de $Q(a_k)$ en fonction de k et n, ainsi que $\lim_{+\infty} Q$, et conclure.

b) *Deuxième méthode* : Utiliser la fonction $f : x \longmapsto P(x)e^{-x}$.

c) *Troisième méthode* : Utiliser l'étude de la fonction $\varphi(x) = \dfrac{P'(x)}{P(x)} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{x - a_k}$ sur $\mathbb{R} \setminus \{a_1, .., a_n\}$.

2) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme non nul tel que $(X-1)^2$ divise P.

Montrer que P admet au moins 3 coefficients non nuls.

Remarque : Plus généralement, on peut montrer que si $(X-1)^n$ divise P, alors P admet au moins $n+1$ coefficients non nuls.

3) (X) Soit P un polynôme réel de degré n tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) \geq 0$.

Montrer que P est de la forme $A^2 + B^2$, où A et $B \in \mathbb{R}[X]$.

Indication : Utiliser $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AB - CD)^2 + (AC + BD)^2$.

On pourra noter Δ l'ensemble des polynômes de la forme $A^2 + B^2$, où A et $B \in \mathbb{R}[X]$.

4) On suppose $n = 2m$ pair.

a) Soient $a_1, ..., a_n$ des réels strictement positifs et $\phi(x) = \prod_{k=1}^{n}(1 + ia_k x)$.

Montrer qu'il existe n valeurs réelles distinctes de x telles que $\operatorname{Re}\phi(x) = 0$.

b) On considère $P(X) = \prod_{k=1}^{n}(1 + a_k X) = \sum_{k=1}^{n} c_k X^k$ et $Q(X) = \operatorname{Re}(P(iX)) = \sum_{j=0}^{m}(-1)^{2j} c_{2j} X^k$.

Montrer que Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$.

Remarque : En adaptant b), on montre de façon plus générale que si $P(X)$ est un polynôme réel scindé à racines réelles, le polynôme $Q(X) = \operatorname{Re}(P(iX))$ est aussi scindé à racines simples.

5) ($\bigstar$) Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$**.** Pour $\varepsilon > 0$, on pose $\delta_\varepsilon(x) = 1$ si $|P(x)| \leq \varepsilon$, et 0 sinon.

On pose $\omega = \lim_{\varepsilon \to 0, \varepsilon > 0} \dfrac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\varepsilon(x)\, dx$.

a) On suppose que P admet 0 comme unique racine réelle. Déterminer ω.

b) Que dire dans le cas général ?

Corrigé

1) a) On sait que $a_1 < b_1 < a_2 < ... < b_{n-1} < a_n$.

De plus, P' est scindé à racines simples, donc P' change de signe en les b_k.

Comme P' est positif au voisinage de $+\infty$, alors le signe de $Q(a_k) = P'(a_k)$ vaut $(-1)^{n-k}$.

Par le TVI, Q s'annule sur chaque intervalle $]a_k, a_{k+1}[$, avec $1 \leq k \leq n-1$.

De plus, Q est négatif en $+\infty$, et $Q(a_n) > 0$, donc Q admet une racine supplémentaire sur $]a_n, +\infty[$.

On obtient ainsi n racines distinctes et comme $\deg Q = n$, alors Q est scindé à racines simples.

b) On a $f'(x) = Q(x)e^{-x}$.

Or, f s'annule en $a_1, ..., a_n$ et en $+\infty$. Par Rolle (et Rolle généralisé), on obtient n racines réelles distinctes.

2) Supposons que $(X-1)^2$ divise $P = aX^n + bX^m$, avec $n < m$. On a $P(1) = P'(1) = 0$.

On obtient un système inversible de dimension 2, d'où $(a, b) = (0, 0)$. D'où le résultat.

Remarque :

Plus généralement, supposons que $(X-1)^n$ divise $P = a_1X^{m_1} + a_2X^{m_2} + ... + a_nX^{m_n}$, avec $m_1 < ... < m_n$.

On a $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $P^{(k)}(1) = 0$. D'où $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $\sum_{j=1}^n a_j m_j(m_j-1)...(m_j-k+1) = 0$.

On se ramène à un système dont la matrice a le même déterminant que la matrice de Van der Monde $(m_j^k)_{1\leq j\leq n, 1\leq k\leq n}$,

qui est inversible, donc tous les a_j sont nuls.

3) On note Δ l'ensemble des polynômes de la forme $A^2 + B^2$, où A et $B \in \mathbb{R}[X]$.

Comme $(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AB - CD)^2 + (AC + BD)^2$, alors Δ est stable par produit.

Or, tout polynôme réel positif est produit de termes de la forme $(X-a)^2$ et $(X^2 + bx + c)$, avec $b^2 - 4c < 0$.

En effet, les racines réelles sont d'ordre pair.

Il suffit donc de vérifier les propriétés pour ces deux types de polynômes.

Or, on $(X-a)^2 = (X-a)^2 + 0^2$ et $(X^2 + bx + c) = (X + \frac{1}{2}b)^2 + \delta^2$, où $\delta = \sqrt{c - \frac{1}{4}b^2}$.

4) a) $\arg \phi(x) = \sum_{k=1}^n \arctan(a_k x)$.

ϕ est continue sur $\mathbb{R}$, strictement croissante et définit une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]-m\pi, m\pi[$.

Par le TVI, il existe $2m$ valeurs de x pour lesquelles $\phi(x) = \dfrac{\pi}{2}\ [\pi]$,

car $]-m\pi, m\pi[$ contient les réels $\dfrac{\pi}{2} + k\pi$, avec $-m \leq k < m$.

b) On a $\forall x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = \mathrm{Re}(P(ix)) = \mathrm{Re}(\phi(x))$.

Par a), Q admet n racines réelles distinctes, et on conclut avec $\deg Q = \deg Q$.

5) a) *Idée* : On note $m \in \mathbb{N}^*$ l'ordre de multiplicité de 0 comme racine de P.

On a $P(x) \sim \lambda x^m$, où $\lambda = \dfrac{P^{(m)}(0)}{m!} \neq 0$. Or, on a $|\lambda x^m| \leq \varepsilon$ ssi $|x| \leq \left|\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right|^{1/m}$.

Ainsi, lorsque $\varepsilon \to 0^+$, δ vaut 1 sur un intervalle dont la longueur L vérifie $L \sim 2\left|\dfrac{\varepsilon}{\lambda}\right|^{1/m}$.

On en déduit que $\omega = \dfrac{2}{|P'(0)|}$ si $m = 1$ et $\omega = +\infty$ si $m \geq 2$.

b) Dans le cas général, il suffit de sommer les contributions associées à chaque racine.

On obtient donc $\omega = +\infty$ si P admet au moins une racine multiple et sinon, $\omega = \sum_{a \text{ racine de } P} \dfrac{2}{|P'(a)|}$.