

1) (*extrait ENS*)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_n > 0$. On pose $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Montrer que $\sum_{(i,j)} \left\{ \frac{x_i}{x_j} \right\} < \frac{3}{4}n^2$.

2) (*écrit Mines*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $A_n = \frac{1}{2^n} \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

On suppose connue la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$ lorsque $n \rightarrow +\infty$.

Déterminer un équivalent de A_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.

3) (*Centrale*) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $f(t) = \frac{\sin(nt)}{\sin t}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f en précisant ses prolongements par continuité.

b) Calculer $\int_0^{2\pi} f(t) dt$.

Remarque : Noter que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} \exp(ikt) dt = \begin{cases} 0 & \text{si } k \in \mathbb{Z}^* \\ 2\pi & \text{si } k = 0 \end{cases}$

En effet, si $k \neq 0$, une primitive de $t \mapsto \exp(ikt)$ est $\frac{1}{ik} \exp(ikt)$, qui est 2π -périodique.

4) (X) On considère $\boxed{f(x) = \sum_{n=1}^N a_n \sin(2\pi nx)}$, avec $N \in \mathbb{N}^*$ et $a_N > 0$.

a) On note m_k le nombre de zéros de $f^{(k)}$ sur $[0, 1[$. En utilisant $e^{2\pi ix}$, montrer que $m_k \leq 2N$.

b) Montrer que $(m_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est croissante.

c) Montrer que $m_k = 2N$ pour k assez grand.

5) (X) (★) Soit $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

On suppose $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(v_n - \frac{1}{2}v_{n+1} \right) = \frac{1}{2}$. Étudier la convergence de $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Corrigé

1) Pour $i = j$, $\left\{ \frac{x_i}{x_j} \right\} = \{1\} = 0$. Pour $i < j$, $\left\{ \frac{x_i}{x_j} \right\} + \left\{ \frac{x_j}{x_i} \right\}$ est de la forme $\{t\} + \left\{ \frac{1}{t} \right\}$.

Posons $f(t) = \{t\} + \left\{ \frac{1}{t} \right\}$. On a donc $\sum_{(i,j)} \left\{ \frac{x_i}{x_j} \right\} = \sum_{i < j} f\left(\frac{x_i}{x_j}\right) \leq \frac{1}{2}n(n-1) \sup_{t>0} f(t)$.

- Pour $t \geq 2$, on a $\left\{ \frac{1}{t} \right\} \leq \frac{1}{2}$ et comme $\{t\} < 1$, alors $f(t) \leq \frac{3}{2}$.

- Pour $1 \leq t < 2$, $f(t) = t - 1 + \frac{1}{t} \leq f(2) - 1 = \frac{3}{2}$, car f est croissante sur $[1, 2]$.

- Le cas $0 < t \leq 1$ se ramène aux cas précédents.

2) Posons $A_n = 2^n \binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. On a $A_{2m} = \frac{1}{2^{2m}} \binom{2m}{m} = \frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m)!}{(m!)^2} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi m}} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

On pourrait faire de même pour n impair. Mais il vaut mieux éviter le terme $(2m+1)^{2m+1} \sim e(2m)^{2m} \dots$

On a en fait : $A_{2m+1} = \frac{1}{2^{2m+1}} \binom{2m+1}{m} = \frac{2m+1}{2m} \frac{1}{2^{2m}} \frac{(2m)!}{(m!)^2} = \frac{2m+1}{2m} A_{2m} \sim A_{2m} \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

On en conclut par la remarque ci-dessous que $A_n \sim \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

Remarque : Lorsque $x_{2m} \rightarrow L$ et $x_{2m+1} \rightarrow L$, alors $x_n \rightarrow L$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m_0 et m_1 tels que $\forall m \geq m_0, |x_{2m} - L| \leq \varepsilon$ et $\forall m \geq m_1, |x_{2m+1} - L| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall n \geq \max(2m_0, 2m_1 + 1), |x_n - L| \leq \varepsilon$.

Ainsi, avec $x_n = \frac{A_n}{B_n}$, on a : si $A_{2m} \sim B_{2m}$ et $A_{2m+1} \sim B_{2m+1}$, alors $A_n \sim B_n$. Ici, $B_n = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

3) a) f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ comme quotient de fonctions C^∞ .

En 0, on a $\sin(nt) \sim nt$ et $\sin t \sim t$, donc $f(t) \sim n$ en $t = 0$.

Donc f est prolongeable par continuité en $t = 0$, en posant $f(0) = 0$.

Comme $f(t + \pi) = (-1)^{(n-1)k} f(t)$, alors f est prolongeable par continuité en tout $t \in \pi\mathbb{Z}$.

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (en prolongeant par $(-1)^{(n-1)k}$ en $t = k\pi$).

b) Pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $f(t) = \frac{\sin(nt)}{\sin t} = \frac{e^{int} - e^{-int}}{e^{it} - e^{-it}} = \frac{(e^{it})^n - (e^{-it})^n}{e^{it} - e^{-it}}$.

Comme $\frac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$, alors $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^{2k-n+1}$.

Lorsque k décrit $\{0, 1, \dots, n-1\}$, $2k - n + 1$ est un entier relatif, et vaut 0 ssi $k = \frac{n-1}{2}$.

On obtient $\int_0^{2\pi} f(t) dt = \begin{cases} 2\pi & \text{si } n \text{ est impair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$

4) On note que la fonction f est 1-périodique. Ainsi, le nombre de zéros de f sur $[a, a+1[$ ne dépend pas de a .

a) On pose $y = \exp(2\pi ix)$. On a $f(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_{n=1}^N a_n (y^n - y^{-n}) = \frac{1}{2\pi i y^N} \sum_{n=1}^N a_n (y^{N+n} - y^{N-n})$.

Donc $f(x) = 0$ revient à résoudre un polynôme d'inconnue y de degré $2N$.

On obtient au plus $2N$ solutions y , et l'application $[0, 1[\rightarrow \mathbb{C} \quad x \mapsto y = \exp(2\pi ix)$ est injective.

b) Soit g de classe C^1 et 1-périodique : $g(x+1) = g(x)$. Alors g' est aussi 1-périodique.

Si $a_1 < \dots < a_r$ sont des zéros de g sur $[0, 1[$, on applique Rolle sur $[a_1, \dots, a_r, a_1 + 1]$.

On obtient bien r zéros distincts sur $]a_1, a_1 + 1[$. Donc g' s'annule au moins r fois sur $[0, 1[$.

Ainsi, la dérivée g' admet au moins autant de zéros que g .

c) $f^{(k)}(x)$ est de la forme $A \sin(2\pi Nx + k\pi/2) + g(x)$, avec $A > \sup |g|$ pour k assez grand.

Il existe des points $a_0 < a_1 < \dots < a_{2N} = a_0 + 1$ tels que $\forall j \in \llbracket 0, 2N \rrbracket, \sin\left(2\pi Na_j + k\frac{\pi}{2}\right) = (-1)^j$.

On a alors $f^{(k)}(a_j)$ du signe de $(-1)^j$, donc par le TVI, $f^{(k+1)}$ admet $2N$ zéros sur $[a_0, a_0 + 1[$.

On en conclut que $m_k \geq 2N$ pour k assez grand. On conclut avec a).

5) Posons $u_n = \left(v_n - \frac{1}{2}v_{n+1}\right)$. On a

$$u_n + \frac{1}{2}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_{n+2} + \dots + \frac{1}{2^p}u_{n+p} = v_n - \frac{1}{2^{p+1}}v_{n+p+1}$$

Comme $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée, alors $\lim_{p \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^{p+1}}v_{n+p+1} = 0$, donc $v_n = \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p}u_{n+p}$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \frac{1}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq n_0$ assez grand, $\left|u_n - \frac{1}{2}\right| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq n_0$, on a donc $\left|v_n - \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} \frac{1}{2}\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{2^p} \left|u_{n+p} - \frac{1}{2}\right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} |\varepsilon|$, c'est-à-dire $|v_n - 1| \leq 2\varepsilon$.

On en déduit $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 1$.