TD Oraux : Schémas de raisonnements, arithmétique

1) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $f(n)$ le nombre de diviseurs de n dans $\mathbb{N}^*$.

Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $f(n)$ est impair.

2) a) Soit $f : E \to E$, où E est fini, et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $x_0 = a \in E$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = f(x_n)$.

Montrer que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique à partir d'un certain rang.

Que dire si f est bijective (c'est-à-dire si f est une permutation de E) ?

b) Soit $n \in \mathbb{N}$ impair. En considérant $(2^k \bmod n)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que n divise $2^p - 1$.

3) a) Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ et $m \in \mathbb{N}^*$. On suppose que f' admet au plus m zéros.

Montrer que f admet au plus $m + 1$ zéros.

b) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On suppose que $f' - \lambda f$ admet au plus m zéros. Montrer que f admet au plus $m + 1$ zéros.

c) (X) Soient $n \in \mathbb{N}^*$.

On considère $a_1, ..., a_n$ des nombres complexes non nuls et $\lambda_1, ..., \lambda_n$ des nombres complexes distincts.

On considère $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(\lambda_k x)$.

Montrer que f admet au plus $(n - 1)$ zéros sur $\mathbb{R}$.

d) Soient $a_1 < ... < a_n$ et $b_1 < ... < b_n$. On pose $M = (\exp(a_i b_j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$. Montrer que $\det M \neq 0$.

e) (X) $(\bigstar)$ Montrer que $\det M > 0$.

Indication : Considérer $\varphi : a_n \longmapsto \det(\exp(a_i b_j))_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq n}$ définie sur $]a_{n-1}, +\infty[$.

Corrigé

1) *Première méthode* : Considérons la décomposition en facteurs premiers $n = \prod_{k=1}^{r} p_k^{m_k}$.

Les diviseurs sont les $d = \prod_{k=1}^{r} p_k^{n_k}$, avec $0 \leq m_k \leq n_k$.

Comme l'écriture est unique, on obtient $\prod_{k=1}^{r}(m_k + 1)$ diviseurs distincts.

Donc $f(n) = \prod_{k=1}^{r}(m_k + 1)$ est impair ssi m_k est pair, donc ssi n est un carré entier.

Séconde méthode : On note que si d divise n ssi $\dfrac{n}{d}$ divise n.

On regroupe ensemble les diviseurs d et $\dfrac{n}{d}$.

On obtient donc un nombre pair de diviseurs ssi $\forall d$, $d \neq \dfrac{n}{d}$, c'est-à-dire ssi n n'est pas un entier carré.

2) a) Par le principe des tiroirs, il existe $0 \leq i < j \leq \operatorname{card} E$ tel que $x_i = x_j$.

Posons $p = j - i$. En composant par f, on obtient $x_{i+n} = x_{i+p+n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est périodique de période p à partir du rang i d'un certain rang.

Si f est bijective, on a nécessairement $x_p = x_0$, car sinon, f ne serait pas bijective.

b) Il y a au plus n valeurs possibles de $2^k \bmod n$.

Par le principe des tiroirs, il existe $0 \leq i < j \leq n$ tels que $2^i \bmod n = 2^j \bmod n$, c'est-à-dire n divise $2^j - 2^i$.

Comme n impair, n divise $2^{j-i}-1$.

3) a) On montre la contraposée : Si f admet au moins $(m+1)$ zéros, alors f' admet au moins m zéros.

On note $x_0 < ... < x_m$ des zéros de f.

Par Rolle, pour tout $k \in \{1, 2, .., .m\}$, il existe $y_k \in]x_{k-1}, x_k[$ tel que $f'(y_k) = 0$.

On a $y_1 < ... < y_m$, donc f' admet bien au moins m zéros.

b) Posons $g(x) = e^{-\lambda x} f(x)$. On a $g'(x) = (f'(x) - \lambda f(x))e^{-\lambda x}$, donc g admet au plus m zéros.

Par a), g admet au plus $m+1$ zéros, donc f admet aussi au plus $m+1$ zéros, car f et g ont les mêmes zéros.

c) On procède par récurrence sur n.

Pour $n = 1$, $x \longmapsto \exp(\lambda x)$ ne s'annule pas, car $|\exp(\lambda x)| = \exp(x \operatorname{Re} \lambda) \neq 0$.

Supposons la propriété vraie au rang $(n-1)$. On considère $f(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \exp(\lambda_k x)$.

Remarque : En dérivant, on obtient $f'(x)$ d'une forme analogue à f. Mais on ne peut appliquer l'hyp de récurrence, sauf si l'un des λ_k est nul. L'idée est de se ramener au cas où l'un des λ_k est nul.

C'est ce qu'on fait quand on prouve b) avec a) : on se ramène au cas où $\lambda = 0$.

Cela revient à considérer la fonction $g(x) = e^{-\lambda_n x} f(x)$ qui est de la forme $\sum_{k=1}^{n-1} b_k e^{\mu_k x} + a_n$.

Ainsi, on peut appliquer l'hypothèse à g' qui est une combinaison de $(n-1)$ exponentielles.

On a $f'(x) - \lambda_n f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k(\lambda_k - \lambda_n) \exp(\lambda_k x)$, avec les $a_k(\lambda_k - \lambda_n)$ non nuls.

Par b), f admet au plus n zéros. Et f et g ont les mêmes zéros.

c) Soit $X \in \mathbb{R}^n$ tel que $MX = 0$. On a alors $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\sum_{j=1}^{n} x_i \exp(a_i b_j) = 0$.

Notons r le nombre de i tels que x_i est non nul.

La fonction $f : \sum_{j=1}^{n} x_i \exp(t b_j)$ s'annule en tous les a_i, donc admet au moins n zéros.

Il résulte de b) que r ne peut être non nul. Donc $X = 0$, et ainsi M est inversible.

d) On fixe $a_1 < ... < a_{n-1}$.

L'application $\phi : a_n \longmapsto \det M$ est continue (polynomiale) et ne s'annule pas sur $]a_{n-1}, +\infty[$.

Donc ϕ est de signe constant.

Or, ϕ est un polynôme en a_n dont le coefficient constant est $\det(\exp(a_i b_j))_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1}$.

Par récurrence sur n, il est positif, donc ϕ est positive sur $]a_{n-1}, +\infty[$, ce qui prouve la propriété.