

1) (*extrait oral Centrale*) Soit $f :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe C^1 .

a) On suppose $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$. La fonction f admet-elle nécessairement une limite en $+\infty$?

b) On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. A-t-on nécessairement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$?

2) (*Mines*) Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $\forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq 1$.

Montrer que $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4}$. Déterminer les cas d'égalité.

3) Soit $f \in C^\infty([0, +\infty[, \mathbb{R})$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que pour x assez grand, $f^{(n)}(x) \geq \varepsilon$.

Montrer que f ne converge pas vers 0 en $+\infty$.

b) (*ENS 2026*) On suppose $f(0) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $y_n \in [0, +\infty[$ tel que $f^{(n)}(y_n) = 0$.

4) (*ENS 2026*) Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 .

Pour $a < b$, on pose $T_{[a,b]}(f) = \{c \in [a, b] \mid f(b) = f(a) + (b-a)f'(c)\}$.

a) Donner une condition suffisante pour que $T_{[a,b]}(f)$ soit un singleton pour tous $a < b$.

b) On suppose a) vérifié. Soit $x \in \mathbb{R}$ tel que $f''(x) \neq 0$.

Pour $h > 0$, on note θ_h l'unique réel appartenant à $[0, h]$ tel que $f(x+h) = f(x) + hf'(x+\theta_h)$.

Trouver un équivalent de θ_h lorsque h tend vers 0^+ .

c) Proposer un contre-exemple si $f''(x) = 0$.

5) On pose $Q_{n,p} = \left\{ M = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \mid \exists a \in \mathbb{R}, \forall (i, j), \sum_{j=1}^p m_{ij} = a = \sum_{i=1}^n m_{ij} \right\}$.

On veut calculer la dimension de $Q_{n,p}$.

a) Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) Montrer que si $G \subset E$, $\dim u(G) = \dim G - \dim(G \cap \text{Ker } u)$.

(ii) Montrer que si $H \subset F$, $\dim u^{-1}(H) = \dim(H \cap \text{Im } u) + \dim \text{Ker } u$.

b) On considère $\Phi : \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \left((\sum_{j=1}^p m_{ij})_{1 \leq i \leq n}, (\sum_{i=1}^n m_{ij})_{1 \leq j \leq p} \right)$.

Montrer que $\dim \text{Ker } \Phi = (n-1)(p-1)$ et que $\text{Im } \phi = \left\{ (s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^p t_j \right\}$.

c) (*ENS 2026*) Déterminer $\dim Q_{n,p}$ en distinguant les cas $n = p$ et $n \neq p$.

Corrigé

1) a) *Contre-exemples* : $f(x) = \ln x$ ou bien $f(x) = x^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$.

On peut aussi considérer $f(x) = \sin(\ln x)$. On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ et f diverge en $+\infty$.

Remarque : Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$, alors par Cesàro $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \int_0^x f'(t) dt = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$.

b) *Contre-exemple* : $f(x) = \frac{1}{x} \sin(x^2)$. On a $|f(x)| \leq \frac{1}{x}$, d'où par pincement, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

On a $f'(x) = 2 \cos(x^2) - \frac{1}{x^2} \sin(x^2)$.

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(\sqrt{2n\pi}) = 2$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f'(\sqrt{2n\pi + \pi}) = -2$. Donc f' diverge en $+\infty$.

Remarque : Pour trouver un contre-exemple $g > 0$, il suffit de considérer $g(x) = f(x) + \frac{2}{x}$.

2) - Par l'IAF appliquée d'une part en 0 et d'autre part en 1, on a : $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq x$ et $|f(x)| \leq (1 - x)$.

Donc $\forall x \in [0, 1], |f(x)| \leq \varphi(x) = \min(x, 1 - x)$.

On en déduit (faire un schéma) que $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx \leq \int_0^1 \varphi(x) dx = 2 \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$.

- Il y a égalité ssi on a l'égalité (1) : $\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \int_0^1 |f(x)| dx$ et l'égalité (2) : $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \varphi(x) dx$.

Pour avoir l'égalité $\int_0^1 |f(x)| dx = \int_0^1 \varphi(x) dx$, il faut que $\forall x \in [0, 1], |f(x)| = \varphi(x)$

(en effet, $x \mapsto \varphi(x) - |f(x)|$ est continue et positive, et d'intégrale nulle, donc identiquement nulle).

Comme φ ne s'annule pas sur $]0, 1[$, alors par le TVI, f est de signe constant, donc $f = \varphi$ ou $f = -\varphi$.

Dans les deux cas, f n'est pas C^1 . Donc il n'y a pas de cas d'égalité.

Remarque : En revanche, il s'agit de la meilleure majoration possible, car on peut trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de classe C^1 telles que $|f'_n| \leq 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \frac{1}{4}$. Ainsi, $\frac{1}{4}$ est une borne sup.

3) a) La propriété est immédiate si $n = 0$, car $f(x) \geq \varepsilon$ pour x assez grand.

Supposons $n \geq 1$. Par hypothèse, il existe $\varepsilon > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que $\forall x \geq a, f^{(n)}(x) \geq \varepsilon$.

Par n intégrations successives sur $[a, x]$, $f(x) \geq \varepsilon \frac{(x-a)^n}{n!} + \sum_{k=0}^{n-1} f^{(k)}(a) \frac{(x-a)^k}{k!}$. Donc $\lim_{+\infty} f = +\infty$.

b) La propriété est immédiate pour $n = 0$.

Supposons par l'absurde qu'il existe un plus petit $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^{(n+1)}$ ne s'annule pas.

Par le TVI, $f^{(n+1)}$ est de signe constant non nul, donc $f^{(n)}$ est strictement monotone.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer que $f^{(n)}$ est strictement croissante.

Comme $f^{(n)}$ s'annule et est strictement croissante, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x) > 0$ (cf th de la limite monotone).

Donc il existe $\varepsilon > 0$ tel que $f^{(n)}(x) \geq \varepsilon$ pour x assez grand. D'où une contradiction par a).

4) a) L'existence de c résulte du théorème des accroissements finis. Pour avoir l'unicité, il suffit que f' soit strictement monotone, c'est-à-dire f strictement convexe ou strictement concave (en fait, c'est une CNS).

b) On a $f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{1}{2}h^2 f''(x) + o(h^2)$ lorsque $h \rightarrow 0^+$.

Par ailleurs, $\theta_h = O(h)$, donc $f'(x+\theta_h) = f'(x) + \theta_h f''(x) + o(\theta_h) = f'(x) + \theta_h f''(x) + o(h)$.

D'où $\frac{1}{2}h^2 f''(x) + \mathfrak{o}(h^2) = h\theta_h f''(x) + \mathfrak{o}(h^2)$.

Comme $f''(x) \neq 0$, alors $\frac{1}{2}h^2 f''(x) \sim h\theta_h f''(x)$, c'est-à-dire $\theta_h \sim \frac{1}{2}h$.

c) *Contre-exemple* : On considère $f(x) = x^4$ qui est bien strictement convexe (donc vérifie b)).

On a $f'(x) = 4x^3$, donc en prenant $x = 0$, on a $4\theta_h^3 = h^4$, donc c) n'est pas vérifié.

5) a) (i) On applique le théorème du rang à la restriction $v : G \rightarrow E \quad x \mapsto u(x)$ de u à G .

On a $\dim u(G) = \text{rg } v = \dim G - \dim \text{Ker } v = \dim G - \dim(G \cap \text{Ker } u)$.

(ii) On pose $G = u^{-1}(H) = \{x \in E \mid u(x) \in H\}$. On a $u(G) = H \cap \text{Im } u$ et $G \subset \text{Ker } u$.

Par (i), $\dim u(G) = \dim F - \dim(G \cap \text{Ker } u)$, d'où $\dim(H \cap \text{Im } u) = \dim u^{-1}(H) - \dim(G \cap \text{Ker } u)$.

b) Les équations $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{j=1}^p m_{ij} = 0$ sont indépendantes, et la dernière colonne de M est entièrement définie par les autres, c'est-à-dire que les m_{ip} sont entièrement définis par $(m_{ij})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq p-1}$.

Lorsque ces équations sont vraies, on a nécessairement $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} = 0$.

De même, $\forall j \in \llbracket 1, p-1 \rrbracket$, les équations $\sum_{i=1}^n m_{ij} = 0$ sont indépendantes, et la dernière ligne $(m_{nj})_{1 \leq j \leq p-1}$ est entièrement définie par la sous-matrice $(m_{ij})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq p-1}$.

De plus, comme $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} = 0$, alors dans ce cas, la dernière équation $\sum_{i=1}^n m_{ip} = 0$ est bien vérifiée.

Ainsi, $M \in \text{Ker } \Phi$ est entièrement définie par la sous-matrice $M' = (m_{ij})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq p-1}$.

Autrement dit, l'application $\text{Ker } \Phi \rightarrow \mathcal{M}_{n-1, p-1}(\mathbb{R}) \quad M \mapsto M'$ est un isomorphisme.

Donc $\dim \text{Ker } \Phi = \dim \mathcal{M}_{n-1, p-1}(K) = (n-1)(p-1)$.

Par le théorème du rang, on a donc $\text{rg } \Phi = np - (n-1)(p-1) = n + p - 1$.

Or, on a de façon évidente $\text{Im } \Phi \subset \left\{ (s_1, \dots, s_n, t_1, \dots, t_p) \mid \sum_{i=1}^n s_i = \sum_{j=1}^p t_j \right\} = V$.

Donc par égalité des dimensions et inclusion, on a $\text{Im } \phi = V$.

c) On a $Q_{n,p} = \Phi^{-1}(\Delta)$, où $\Delta = \mathbb{R}(1, \dots, 1)$.

Premier cas : $n = p$. On a $\Delta \subset \text{Im } \Phi$, donc $\dim Q_{n,p} = \dim(\Delta) + \dim \text{Ker}(\Phi) = 1 + (n-1)(p-1)$.

Second cas : $n \neq p$. On a $\Delta \cap \text{Im } \Phi = \{O_{np}\}$, donc $\dim Q_{n,p} = \dim \text{Ker}(\Phi) = (n-1)(p-1)$.

Remarque : Dans le cas $n \neq p$, on a nécessairement $a = 0$, car $na = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^p m_{ij} = \sum_{j=1}^p \sum_{i=1}^n m_{ij} = pa$.