TD Oral 11

1) (*Mines*) On considère $M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

Calculer M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

2) (X) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$ telle que la suite $(A^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée.

Montrer que A est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(A) \subset U$.

3) (*ENS*) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. On considère $S(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{P(n)}{n!} z^n$.
Montrer qu'il existe un polynôme Q de même degré que P tel que $Q(z)\exp(z) = S(z)$.

On propose deux méthodes :

a) Calculer $Q(z)\exp(z)$ lorsque $Q(z) = z^p$. Conclure.

b) Calculer $Q(z) = S(z)\exp(-z)$ en utilisant $\delta : \mathbb{C}[X] \to \mathbb{C}[X] \quad P(z) \longmapsto P(z) - P(z-1)$.

4) (X) Soient des variables aléatoires X_j i.i.d. de loi géométrique $\mathcal{P}(1-a)$, où $0 < a < 1$.

On considère $Y_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $Z_n = \min(X_1, ..., X_n)$.

a) Montrer que la loi de Z_n est géométrique, et déterminer $E(Z_n)$.

b) Montrer que Y_n est d'espérance finie et que $E(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-(1-a^k)^n)$.

c) Déterminer un équivalent de $E(Y_n)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

TD Oral 11. Corrigé

1) On a $M = J + 2I_n$, où $J = (1) \in \mathcal{M}_n(K)$.

On a J diagonalisable semblable à $\mathrm{Diag}(0, ..., 0, n)$. Donc M semblable à $\mathrm{Diag}(2, ..., 2, n+2)$.

Donc il existe P et Q tels que $\forall k \in \mathbb{N}$, $M^k = 2^k P + (n+2)^k Q$.

On trouve P et Q avec $\begin{cases} P + Q = I_n \\ 2P + (n+2)Q = M \end{cases}$, donc $P = \dfrac{(n+2)I_n - M}{n}$ et $Q = \dfrac{M - 2I_n}{n}$.

Donc $M^k = \dfrac{1}{n}\begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix}$, où $a = 2^k(n-1) + (n+2)^k$ et $b = -2^k + (n+2)^k$.

2) On peut se ramener au cas où A est triangulaire supérieure.

On en déduit que pour tout coefficient λ de la diagonale, $(\lambda^k)_{k\in\mathbb{Z}}$ est bornée, donc $\lambda \in U$. D'où $\mathrm{Sp}(A) \subset U$.

Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, et posons m l'ordre de multiplicité de λ comme racine de χ_A.
Alors A est semblable à une matrice de la forme $B = \left(\begin{array}{c|c} \lambda I_m + N & * \\ \hline O & T \end{array}\right)$,
où $\lambda \notin \mathrm{Sp}(A)$ et T triangulaire supérieure, et N triangulaire supérieure stricte.

Notons p l'ordre de nilpotence de N. On a $p \in \mathbb{N}^*$ et N^{p-1} non nul.

On a par le binôme, $(\lambda I_m + N)^k = \lambda^k I_m + k\lambda^{k-1}N + \binom{k}{2}\lambda^{k-2}N^2 + ... + \binom{k}{p-1}\lambda^{k-(p-1)}N^{p-1} = \lambda^n \sum_{j=0}^{p-1}\binom{k}{j}\dfrac{N^j}{\lambda^j}$.

$\sum_{j=0}^{p-1}\binom{k}{j}\dfrac{N^j}{\lambda^j}$ est une matrice (d'ordre m) dont les coefficients sont des polynômes en k de degré j.

Ces polynômes sont bornés pour $k \in \mathbb{Z}$, donc sont constants.

Or, les coefficients de degré $p-1$ viennent uniquement du terme $\binom{k}{p-1}\lambda^{k-(p-1)}N^{p-1}$.

Si $p-1 \in \mathbb{N}^*$, on a donc nécessairement $\lambda^{k-(p-1)}N^{p-1} = O_n$, ce qui contredit N^{p-1} non nul.

On en déduit que la dimension de E_λ vaut bien m, et ainsi, on en conclut que A est diagonalisable.

3) a) On a $z^k \exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{H_k(n)}{n!} z^n$, où $H_k(x) = x(x-1)...(x-k+1)$.

Or, les polynômes $H_k(x) = x(x-1)...(x-k+1)$ de degrés échelonnés forment une base de $\mathbb{R}[X]$.

D'où (par linéarité) l'existence et l'unicité de $Q(x)$.

b) On pose $Q(z) = S(z)\exp(-z) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n$, où on a (produit de Cauchy) :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{P(n-k)}{(n-k)!}\frac{(-1)^k}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(n-k)\right)\frac{1}{n!}$$

Or, on a $\delta^n(P) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}P(n-k)$ en posant $\delta = \mathrm{Id} - t$, où $t : P(x) \longmapsto P(x-1)$.

Ainsi, $Q(z) = \sum_{n=0}^{+\infty}\delta^n(P)(n)\dfrac{z^n}{n!}$.

Pour $n > \deg P$, on a $\delta^n(P) = 0$, et pour $n = \deg P$, on a $\delta^n(P)$ constante non nulle.

En effet, pour tout polynôme non constant, on a $\deg \delta(P) = \deg P - 1$.

Donc Q est bien un polynôme de même degré que P.

4) a) On a $P(X_j > k) = a^k$.

$P(Z_n > k) = P(X_1 > k, ..., X_n > k) = (a^k)^n = (a^n)^n$, donc Z_n suit une loi $\mathcal{G}(1-a^n)$ et $E(Z_n) = \dfrac{1}{1-a^n}$.

b) Y_n est d'espérance finie, car $Y_n \leq X_1 + ... + X_n$, et on a ainsi $E(Y_n) \leq nE(X_1)$.

On a $P(Y_n \leq k) = P(X_1 \leq k, ..., X_n \leq k) = P(X_1 \leq k)^n = (1-a^k)^n$, car $P(X_1 > k) = a^k$.

Donc $E(Y_n) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(Y_n > k) = \sum_{k=0}^{+\infty}(1-(1-a^k)^n)$.

Remarque : On peut aussi prouver $E(Y_n) < +\infty$ en prouvant la cv de la série (on a $(1-(1-a^k)^n) = O_{+\infty}(a^k)$).

c) *Solution abrégée* :

On se ramène à évaluer l'intégrale $J_n = \int_0^{+\infty}(1-(1-e^{-t\lambda})^n)\,dt$, où $\lambda = -\ln a > 0$.

On utilise le changement de variable $e^{-t\lambda} = x$, avec $0 < x < 1$, c'est-à-dire $t = \dfrac{-\ln x}{\lambda}$. On a $dt = \dfrac{-dx}{x\lambda}$.

On obtient $J_n = \dfrac{1}{\lambda}\int_0^1 \dfrac{1-(1-x)^n}{x}\,dx = \dfrac{1}{\lambda}\int_0^1 \dfrac{1-y^n}{1-y}\,dy = \dfrac{1}{\lambda}\int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} y^k\,dy = \dfrac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k} \sim \dfrac{\ln n}{\lambda}$.

Donc $E(Y_n) \sim \dfrac{\ln n}{-\ln a}$.

Remarque : Cela correspond à la valeur de k pour laquelle $P(X > k) = \dfrac{1}{n+1}$, c'est-à-dire $k\ln a \sim -\ln n$.