TD Oral 09. Les corrigés sont en fin de sujet

1) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. entières i.i.d. On suppose $P(X_1=0)>0$ et $P(X_1=1)>0$.

On pose $S_n=\sum_{k=1}^n X_k$.

a) On note $p=P(X_1 \text{ pair})$. On a $p\in]0,1[$. Calculer $a_n=P(S_n \text{ pair})$, et déterminer $\lim_{n\to+\infty} a_n$.

Indication : Deux méthodes possibles :

Calculer a_n par récurrence, ou bien exprimer a_n en fonction de $G_{S_n}(1)$ et $G_{S_n}(-1)$.

b) (*ENS*) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(\text{ 4 divise } S_n)=\dfrac{1}{4}$.

2) (*Centrale, Mines*) Soit $X:\Omega\to\mathbb{N}^*$ une variables aléatoire entière.

On considère une suite de v.a. indépendantes $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de même loi que X

Pour $n\in\mathbb{N}^*$, on pose $Z_n=\operatorname{card}\{X_1,...,X_n\}$ qui est donc une v.a. à valeurs dans $[\![1,n]\!]$.

a) Soit $p\in\mathbb{N}$. Montrer avec soin que $E(Z_n)\leq p+nR_p$, où $R_p=P(X>p)$.

Indications : a) Considérer $Z_n^-=\operatorname{card}\left(\{X_1,...,X_n\}\cap[\![1,p]\!]\right)$ et $Z_n^+=\operatorname{card}\left(\{X_1,...,X_n\}\cap[\![p+1,+\infty]\!]\right)$.

Majorer Z_n^+ par une somme de variables de Bernoulli.

b) Montrer que $E(Z_n)=\mathfrak{o}(n)$ lorsque n tend vers $+\infty$..

c) On suppose X d'espérance finie. Montrer que $\lim_{p\to+\infty} pR_p=0$ et en déduire $E(Z_n)=O_{+\infty}(\sqrt{n})$.

3) (*Mines*) On considère X de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$ et Y de loi de Poisson $\mathcal{P}(p)$ avec $p\in[0,1]$.

Majorer $P(X=Y)$ et trouver des variables X et Y pour lesquelles cette majoration est atteinte.

4) (*Centrale*) Soit E un espace euclidien.

Soit $(e_1,...,e_p)$ une famille de vecteurs tels que $\forall x\in E$, $\|x\|^2=\sum_{k=1}^p \langle x,e_k\rangle^2$.

a) Montrer que $(e_1,...,e_p)$ est une famille génératrice de E.

b) Montrer que $\forall k\in\{1,2,...,p\}$, $\|e_k\|\leq 1$.

c) Montrer que $(e_1,...,e_p)$ est une base orthonormée ssi les e_k sont de norme 1.

d) Montrer que si $p=n$, alors $(e_1,...,e_n)$ est une base orthonormée

TD Oral 09. Corrigé

1) Posons $G_X(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)z^n$ pour $|z|\leq 1$. On a $G_{S_n}(z)=G_X(z)^n$.

a) *Première méthode* :

On a $a_{n+1}=pa_n+q(1-a_n)=q+\lambda a_n$, où $\lambda=(p-q)=(2p-1)=(1-2q)\in]-1,1[$.

Le point fixe de l'homothétie $h:t\longmapsto q+\lambda t$ est $c=\dfrac{q}{1-\lambda}=\dfrac{1}{2}$.

On a donc $(a_n-\frac{1}{2})=\lambda^n(a_0-\frac{1}{2})$, et comme $a_0=1$, on obtient $a_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\lambda^n$.

Seconde méthode : On a $P(S_n \text{ pair})=\sum_{n \text{ pair}} P(S_n=n)=\dfrac{1}{2}(G_{S_n}(1)^n+G_{S_n}(-1)^n)$.

On obtient donc $P(S_n \text{ pair})=\dfrac{1}{2}(1+(p-q)^n)$.

b) *Première méthode* :

$P(4 \text{ divise } S_n)=\dfrac{1}{4}(G_{S_n}(1)+G_{S_n}(i)+G_{S_n}(-1)+G_{S_n}(-i))=\dfrac{1}{4}(G_X(1)^n+G_X(i)^n+G_X(-1)^n+G_X(-i)^n)$.

En effet, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1^n + i^n + (-1)^n + (-i)^n = \begin{cases} 4 \text{ si } n \in 4\mathbb{N} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

On a $G_X(1) = 1$, $|G_X(i)| < 1$, $|G_X(-1)| < 1$ et $|G_X(-i)| < 1$.

En effet, pour $\varepsilon \in \{i, -i, -1\}$, on a $|P(X_1 = 0) + \varepsilon P(X_1 = 1)| < P(X_1 = 0) + P(X_1 = 1)$.

On en déduit que $P(4 \text{ divise } S_n) = \dfrac{1}{4} + \mathfrak{o}\,(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Seconde méthode : Posons $q_r(n) = P(S_n \equiv r\ [4])$. On pose $a_r = P(X \equiv r\ [4])$.

Par la formule des probas totales, $q_r(n+1) = a_0 q_r(n) + a_1 q_{r-1}(n) + a_2 q_{r-2}(n) + a_3 q_{r-3}(n)$.

On obtient une chaîne de Markov de matrice de transition $A = \begin{pmatrix} a_0 & a_3 & a_2 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_3 & a_2 \\ a_2 & a_1 & a_0 & a_3 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$.

Avec $Z_n = (q_r(n))_{0 \le r \le 3}$, on a $Z_0 = (1, 0, 0, 0)$ et $Z_{n+1} = AZ_n$.

Les valeurs propres de cette matrice (matrice circulante) sont $a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 1$, et les $a_0 + \varepsilon a_1 + \varepsilon^2 a_2 + \varepsilon^3 a_3$, où $\varepsilon \in \{i, -i, -1\}$ qui sont en module < 1, car $a_0 > 0$ et $a_1 > 1$.

Donc $\lim_{n \to +\infty} A^n Z_0 = \lambda(1, 1, 1, 1)$ vecteur propre de valeur 1, et $\lambda = \frac{1}{4}$ car la limite est une loi.

2) *Remarque* : On a toujours $\operatorname{card} Z_n \le n$.

a) Posons $Z_n^- = \operatorname{card}\left(\{X_1, ..., X_n\} \cap [\![1, p]\!]\right)$ et $Z_n^+ = \operatorname{card}\left(\{X_1, ..., X_n\} \cap [\![p+1, +\infty]\!]\right)$.

On a $Z_n = Z_n^- + Z_n^+$. D'une part, on a : $Z_n^- \le \operatorname{card}(\Delta_p) = p$. D'autre part, on a : $Z_n^+ \le \sum_{k=1}^n 1_{X_k \ge p}$.

Donc $E(Z_n) \le \operatorname{card}(\Delta_p) + nP(X \ge p) = p + nR_p$.

b) On a $\lim_{p \to +\infty} R_p = 0$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe donc p tel que $R_p \le \frac{1}{2}\varepsilon$.

Pour n assez grand, $p \le \frac{1}{2} n\varepsilon$, donc on obtient pour n assez grand, $E(Z_n) \le n\varepsilon$. D'où le résultat.

c) On a $\lim_{p \to +\infty} pR_p = 0$ car $pR_p \le \sum_{k=p+1}^{+\infty} ka_k$ reste de la série $E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} ka_k$.

En prenant $p = \sqrt{n}$ et sachant que $R_p = \mathfrak{o}\left(\frac{1}{p}\right)$, on obtient bien $E(Z_n) = O(\sqrt{n})$.

3) On a $P(X = Y) = P(X = Y = 0) + P(X = Y = 1)$.

Donc $P(X = Y) \le \min(P(X = 0), P(Y = 0)) + \min(P(X = 1), P(Y = 1))$.

On obtient ainsi $P(X = Y) \le \min(p, e^{-p}) + \min(p, pe^{-p}) = \min(p, e^{-p}) + p$.

Premier cas : $p \ge e^{-p}$

Pour avoir égalité, on choisit X et Y telles que $(Y = 0) \subset (X = 0)$ et $(X = 1) \subset (Y = 1)$.

Second cas : $p \le e^{-p}$

Pour avoir égalité, on choisit X et Y telles que $(Y = 0) \subset (X = 0)$ et $(X = 1) \subset (Y = 1)$.

4) a) Posons $F = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_p)$. Si $x \in F^\perp$, on a $\|x\|^2 = \sum_{k=1}^p 0 = 0$, donc $x = \overrightarrow{0}$.

Donc $F^\perp = \{\overrightarrow{0}\}$ et ainsi $F = (F^\perp)^\perp = E$, c'est-à-dire $(e_1, ..., e_p)$ est une famille génératrice.

b) On a $\|e_k\|^2 \ge \langle e_k, e_k \rangle^2 = \|e_k\|^4$, donc $\|e_k\| \le 1$.

c) Le sens direct est immédiat. Supposons les e_k sont de norme 1. Compte tenu de a), il suffit de prouver que les e_j sont deux à deux orthogonaux (car une famille orthonormée est nécessairement libre).

On a $1 = \|e_k\|^2 = \sum_{j=1}^p \langle e_k, e_j \rangle^2 = 1 + \sum_{j \ne k} \langle e_k, e_j \rangle^2$, donc $\forall j \ne k,\ \langle e_k, e_j \rangle = 0$.

d) Supposons $n = p$. On a ainsi $\dim \operatorname{Vect}(e_2, ..., e_n) < n$.

Donc il existe un vecteur x non nul appartenant à l'orthogonal de $\operatorname{Vect}(e_2, ..., e_n)$.

On a alors $\|x\|^2 = \langle x, e_1 \rangle^2$. Or, $\langle x, e_1 \rangle^2 \le \|x\|^2 \|e_1\|^2$. Donc $\|e_1\| = 1$.

De même pour tous les vecteurs $e_2, ..., e_n$. Par c), $(e_1, ..., e_n)$ est une base orthonormée.