TD Oral 08. Les corrigés sont en fin de sujet

1) Soit X une variable aléatoire réelle à valeurs positives. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $E(X^p) < +\infty$.

a) Montrer que pour tout $1 \leq k \leq p$, $E(X^k) < +\infty$.

b) (*extrait ENS*) On suppose $p = 2^n$. Montrer que $E(X)^p \leq E(X^p)$. Préciser les cas d'égalité.

Remarque : En fait, l'inégalité du b) est vraie pour tout p par l'inégalité de Jensen :

L'application $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \quad x \longmapsto x^p$ est convexe (car $f''(x) \geq 0$), donc $f(E(X)) \leq E(f(X))$.

En effet, $f(X) \geq L(X)$, où $L(X)$ est la tangente à f en $\mu = E(X)$. D'où $E(f(X)) \geq E(L(X)) = L(\mu) = f(\mu)$.

2) (*ENS*) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0, 1[$. Soit dans le plan un graphe non orienté aléatoire à n sommets.

On note $X_{ij} = 1$ si les points d'indices i et j sont reliés, et 0 sinon.

On suppose les X_{ij} indépendantes et de même loi $\mathcal{B}(p)$.

On note T_n le nombre de triangles formés par ces n points. On pose $a_n = \binom{n}{3} p^3$.

Calculer $E(T_n)$ et montrer que $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to +\infty} P\left(\left|\dfrac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) = 0$.

3) (*Centrale*) Une matrice de Hadamard est une matrice orthogonale réelle dont les coefficients sont tous égaux en valeur absolue, c'est-à-dire $A = (\varepsilon_{i,j}\alpha)_{i,j} \in O_n(\mathbb{R})$ où $\alpha \in \mathbb{R}_+$ et $\varepsilon_{i,j} = \pm 1$.

a) Déterminer α.

b) Que dire des matrices A^{-1}, A^T, et $-A$?

c) Déterminer le nombre de matrices de Hadamard en dimension 2.

d) On suppose $n \geq 2$ et que A est de plus symétrique. Montrer que A admet exactement 2 valeurs propres.

On note a et b leurs ordres de multiplicité. Montrer que $|a - b| \leq \sqrt{n}$.

e) Montrer qu'il existe une matrice de Hadamard en dimension 2^k pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

4) Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé.

Montrer que $|P(A \cap B) - P(A)P(B)| \leq \sqrt{P(A)P(\overline{A})P(B)P(\overline{B})}$.

Corrigé

1) a) $X^k \leq \max(1, X^p) \leq 1 + X^p$ d'espérance finie.

b) On sait que $E(X^2) \geq E(X)^2$ avec égalité ssi $V(X) = 0$, c'est-à-dire X constante presque sûrement.

On a donc $E(X^{(2^n)}) \geq E(X^{(2^{n-1})})^2 \geq E(X^{(2^{n-2})})^4 \geq ... \geq E(X)^{2^n}$, avec égalité ssi X constante presque sûrement.

2) Notons A_{ijk} l'événement : Le triangle de sommets i, j et k est formé.

On a donc $P(A_{ijk}) = P(X_{ij} = 1, X_{ik} = 1, X_{jk} = 1) = p^3$, car les variables X sont indépendantes.

Et $T_n = \sum_{i<j<k} 1_{A_{ijk}}$, donc $E(T_n) = \sum_{i<j<k} P(A_{ijk}) = \binom{n}{3} p^3$.

Pour prouver l'inégalité, on va utiliser l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Il faut donc évaluer $V(T_n)$. On a $V(T_n) = \sum_{i<j<k} \sum_{i'<j'<k'} \operatorname{Cov}(1_{A_{ijk}}, 1_{A_{i'j'k'}})$.

Notons $m \in \{0, 1, 2, 3\}$le nombre d'arêtes communes aux triangles ijk et $i'j'k'$.

Si $m = 0$, $1_{A_{ijk}}$ et $1_{A_{i'j'k'}}$ sont indépendantes, donc $\operatorname{Cov}(1_{A_{ijk}}, 1_{A_{i'j'k'}}) = 0$.

Dans les autres cas, $\left|\operatorname{Cov}(1_{A_{ijk}}, 1_{A_{i'j'k'}})\right| \leq V(1_{A_{ijk}}) V(1_{A_{i'j'k'}}) \leq 1$.

Le nombre de triangles ayant (i, j) comme arête vaut $(n - 2)$.

Donc le nombre de couples de triangles ayant une arête commune est $\leq \binom{n}{2}(n-2)^2$.

On en conclut que $V(T_n) = O(\binom{n}{2}(n-2)^2) = O(n^4)$, donc $V\left(\dfrac{T_n}{a_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, car $a_n \sim \dfrac{n^3}{6}$.

Par Bienaymé-Tchebychev, $P\left(\left|\dfrac{T_n}{a_n} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq \dfrac{1}{\varepsilon^2} V\left(\dfrac{T_n}{a_n}\right) = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, d'où le résultat.

3) a) $\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$, car les vecteurs colonnes sont de norme 1.

b) $-A$ et $A^{-1} = A^T \in O_n(\mathbb{R})$ et sont aussi des matrice de Hadamard**.**

c) Ce sont les matrices de rotation d'angles $\dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et les matrices de symétrie obtenues en changeant le signe de la seconde colonne (à partir des matrices de rotation), donc 8 matrices au total.

d) A est donc diagonalisable. Comme $A \in O_n(\mathbb{R})$, on a $\operatorname{Sp}(A) \subset \{-1, 1\}$ car $\|AX\| = \|X\|$.

D'autre part, 1 ne peut être la seule valeur propre, car $A \neq I_n$. De même pour -1 car $A \neq -I_n$.

Posons $a = \dim E_1$ et $b = \dim E_{-1}$. On a $|a - b| = |\operatorname{tr} A| \leq n\alpha = \sqrt{n}$.

e) On procède par récurrence. La propriété est vraie pour $k = 1$ et $k = 2$.

Si $A \in O_n(\mathbb{R})$ est de Hadamard, alors $B = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \left(\begin{array}{c|c} A & -A \\ \hline A & A \end{array}\right)$ est une matrice de Hadamard.

4) On considère $a = P(A)$ et $b = P(B)$.

On a $P(A \cap B) - P(A)P(B) = E(1_A 1_B) - E(1_A)E(1_B) = \operatorname{Cov}(1_A, 1_B)$.

Par Cauchy-Schwarz : $|\operatorname{Cov}(1_A, 1_B)| \leq \sigma(1_A)\sigma(1_B) = \sqrt{V(1_A)V(1_B)} = \sqrt{a(1-a)b(1-b)}$.