TD Oral 07

1) *Théorème du min-max*

Soit E un espace euclidien et $u \in \mathcal{S}(E)$. On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de u.

a) Montrer que $\lambda_n = \sup_{x \neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}$, et préciser les cas d'égalité. De même, on a $\lambda_1 = \inf_{x \neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.

b) Soit F un sev de dimension $\geq p$. Montrer que $\sup_{x \in F,\ x \neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_p$.

Indication : Considérer $G = \text{Vect}(e_p, e_{p+1}, ..., e_n)$. Noter que $F \cap G$ contient un vecteur *non nul* x.

c) En déduire que

$$\lambda_p = \inf_{F \text{ sev de dim } p} \left(\sup_{x \in F,\ x \neq 0} \frac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \right)$$

d) (★) Soit $A \in S_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On considère la sous-matrice $B = (a_{ij})_{1 \leq i \leq n-1, 1 \leq j \leq n-1} \in S_{n-1}(\mathbb{R})$.

On note $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq ... \leq \lambda_n$ les valeurs propres de A, et $\mu_1 \leq \mu_2 \leq ... \leq \mu_{n-1}$ les valeurs propres de B.

Montrer que $\lambda_1 \leq \mu_1 \leq \lambda_2 \leq \mu_2 \leq ... \leq \lambda_{n-1} \leq \mu_{n-1} \leq \lambda_n$.

2) (*Centrale*) Soit $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$.
On pose $E = \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} \dfrac{f(n)}{n^s} \text{ converge} \right\}$ et $F = \left\{ s \in \mathbb{R} \mid \sum_{n \geq 1} \dfrac{f(n)}{n^s} \text{ converge absolument} \right\}$.

On définit $\sigma_c(f) = \inf E$ (si $E = \emptyset$, $\sigma_c(f) = +\infty$; si $E = \mathbb{R}$, $\sigma_c(f) = -\infty$) et $\sigma_a(f) = \inf F$.

a) Déterminer $\sigma_c(f)$ et $\sigma_a(f)$ dans les deux cas : (i) $f(n) = \dfrac{1}{2^n}$; (ii) $f(n) = \dfrac{(-1)^n}{n^r}$ où $r \in \mathbb{R}$.

b) Montrer que : $\sigma_c(f) \leq \sigma_a(f)$, et que cette inégalité est optimale.

c) Montrer que $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$, et que ces inégalités sont optimales.

3) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$.

a) Montrer qu'il existe $\gamma = \lim_{n \to +\infty}(S_n - \ln n)$, appelé constante d'Euler.

b) Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $a_n \sim \dfrac{1}{n^2}$. On pose $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k$. Montrer que $R_n \sim \dfrac{1}{n}$.

On *admettra* la propriété de sommation des équivalents des restes de séries à termes positifs :

Si $a_n \sim b_n$, avec $b_n > 0$, et si $\sum b_n$ converge, alors $\sum_{k=n}^{+\infty} a_k \sim \sum_{k=n}^{+\infty} b_k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Montrer que $S_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

d) Expliquer comment trouver un terme de plus dans le DA.

Corrigé

1) a) On se place dans une base $(e_1, ..., e_n)$ de vecteurs propres de u.

On a $\langle u(x), x\rangle = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i^2 \leq \lambda_n \|x\|^2$, avec égalité lorsque $x = e_n$.

b) On a $\dim G = n - p + 1$. Comme $\dim F \geq p$, on a : $\dim G_p + \dim F > n$.

Donc G et F ne sont pas en somme directe. Donc $F \cap G_p$ contient un vecteur non nul x.

Comme $x \in G$, on a a foritori : $\langle u(x), x\rangle \geq \lambda_p \|x\|^2$. Donc $\sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \geq \lambda_p$.

c) Il y a égalité avec $F = \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_p)$. Donc λ_p est un minorant qui est atteint, c'est-à-dire le minimum.

d) On note $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

On note $\mathcal{F}_p$ l'ens des sev F de dimension $\geq p$ vérifiant $F \subset \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_n)$

On note $\mathcal{G}_p$ l'ens des sev G de dimension $\geq p$ vérifiant $G \subset \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$

On a $\lambda_p = \inf_{F\in\mathcal{F}_p} \sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}$ et $\mu_p = \inf_{F\in\mathcal{G}_p} \sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}$.

Comme $\mathcal{G}_p \subset \mathcal{F}_p$, alors $\lambda_p \leq \mu_p$.

Soit $1 \leq p < n$. Pour tout sev F de dimension $\geq p + 1$, on considère $G = F \cap \mathrm{Vect}(e_1, ..., e_{n-1})$.

On a donc a fortiori $G \in \mathcal{G}_p$.

De plus $\sup_{x\in G,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2} \leq \sup_{x\in F,\ x\neq 0} \dfrac{\langle u(x), x\rangle}{\|x\|^2}$. On en déduit $\mu_p \leq \lambda_{p+1}$.

2) a) (i) $\dfrac{f(n)}{n^s} = \dfrac{1}{n^s 2^n} = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$, donc converge absolument dans tous les cas et $\sigma_c(f) = \sigma_a(f) = +\infty$.

(ii) $\dfrac{f(n)}{n^s} = \dfrac{(-1)^n}{n^{r+s}}$ et la série converge $\sum_{n\geq 1} \dfrac{f(n)}{n^s}$ ssi $r + s > 0$ et converge absolument ssi $r + s > 1$.
Donc $\sigma_c(f) = -r$ et $\sigma_a(f) = 1 - r$.

b) On a $F \subset E$ (car cv absolue implique cv), donc $\inf E \leq \inf F$, c'est-à-dire $\sigma_c(f) \leq \sigma_a(f)$.

- Pour l'optimalité, il suffit de prendre $f(n) \in \mathbb{R}^+$, par exemple $f(n) = 1$: on a $\sigma_c(f) = \sigma_a(f) = 1$.

c) Si $\sum a_n$ converge et si $\sum b_n$ converge absolument, alors $\sum a_n b_n$ converge absolument.
En effet, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$ et de ce fait, $a_n b_n = O(b_n)$.
On prend ici $a_n = \dfrac{f(n)}{n^s}$ et $b_n = \dfrac{1}{n^{1+\varepsilon}}$, avec $\varepsilon > 0$.
Ainsi, si $s \in E$, alors $s + 1 + \varepsilon \in F$, donc $E \subset (F - (1 + \varepsilon))$, d'où $\sigma_a(f) - (1 + \varepsilon) \leq \sigma_a(f)$.

Donc $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1 + \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. D'où $\sigma_a(f) \leq \sigma_c(f) + 1$ en faisant tendre ε vers 0.

- Pour l'optimalité, on considère $f(n) = (-1)^n$: on a bien $\sigma_c(f) = 0$ et $\sigma_a(f) = 1$.

3) a) On pose $u_n = S_n - \ln n$. On a $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln(n + 1) + \ln n$.

On vérifie : $(u_{n+1} - u_n) \sim \dfrac{-1}{2n^2}$. Donc $\sum(u_{n+1} - u_n)$ converge, et ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

b) Posons $b_n = \dfrac{1}{n^2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq p$ assez grand, $|a_n - b_n| \leq \varepsilon b_n$.

Donc $\forall n \geq p$, $\left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k - \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k\right| \leq \varepsilon \sum_{k=n+1}^{+\infty} b_k$. On en déduit que $R_n \sim \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2}$.

Or, on a par encadrement $\int_{n+1}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \leq \int_{n}^{+\infty} \dfrac{dt}{t^2}$, donc $\sum_{k=n+1}^{+\infty} \dfrac{1}{k^2} \sim \dfrac{1}{n}$.

c) Il résulte de b) que $\sum_{k=n+1}^{+\infty}(u_{n+1} - u_n) \sim -\dfrac{1}{2n}$, c'est-à-dire $\gamma - u_n = -\dfrac{1}{2n} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

Donc $S_n = \ln n + \gamma + \dfrac{1}{2n} + \mathfrak{o}_{+\infty}\left(\dfrac{1}{2n}\right)$.

d) On considère $v_n = S_n - \ln n - \gamma - \dfrac{1}{2n}$.

On cherche un équivalent de $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) - \dfrac{1}{2(n+1)} + \dfrac{1}{2n}$.

On obtient $(v_{n+1} - v_n) \sim \dfrac{2}{3n^3}$. On en déduit $v_n \sim -\sum_{k=n}^{+\infty} \dfrac{2}{3k^3} \sim -\dfrac{1}{3n^2}$.