TD Oral 06. Les corrigés sont en fin de sujet

1) (*Mines*) Montrer que toute matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est somme de deux matrices diagonalisables.

Exemple : Montrer que $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est somme de deux matrices de projections.

2) a) Soient des nombres complexes distincts $\lambda_1, ..., \lambda_p$.

Donner une CNS pour que $P(X) = \prod_{k=1}^{p}(X^2 - \lambda_k)$ soit à racines simples sur $\mathbb{C}$.

b) (X) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$. Montrer que si A^2 est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

c) Donner un exemple de matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$ non diagonalisable telle que A^2 est diagonalisable.

d) Donner un exemple de matrice $A \in GL_2(\mathbb{R})$ non diagonalisable telle que A^2 est diagonalisable.

2) bis) ($\bigstar$) Soit $A \in GL_n(\mathbb{C})$.

Montrer que A est diagonalisable ssi (A^2 est diagonalisable et $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^2$).

3) Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

a) (*Centrale*) On suppose que $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) = \emptyset$.

(i) Montrer que $\chi_A(B)$ est inversible

(ii) En déduire que si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ vérifie $AM = MB$, alors $M = O_n$.

b) (X) ($\bigstar$) Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) Il existe une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ non nulle telle que $AM = MB$

(ii) $\operatorname{Sp}(A) \cap \operatorname{Sp}(B) \neq \emptyset$.

Indications : Pour prouver que (i) implique (ii), il y a deux méthodes possibles :

- Soit λ une valeur propre commune à A et B.

Justifier d'abord qu'il existe des vecteurs X et Y non nuls tels que $AX = \lambda X$ et $Y^T B = \lambda Y^T$.

- Pour P et Q inversibles, on note que $(P^{-1}AP)(P^{-1}MQ) = (P^{-1}MQ)(Q^{-1}BQ)$.

Il existe P et Q telles que $(P^{-1}MQ) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & O \\ \hline O & O \end{array}\right)$. Alors $P^{-1}AP = \left(\begin{array}{c|c} C & * \\ \hline O & * \end{array}\right)$ et $Q^{-1}BQ = \left(\begin{array}{c|c} C & O \\ \hline * & * \end{array}\right)$.

En déduire que χ_A et χ_B admettent au moins r racines communes (et ici, on a $r \geq 1$).

4) (X) Soient $v_1, ..., v_n$ des vecteurs de $E = \mathbb{R}^n$. On pose $F = \operatorname{Vect}(v_i - v_j)_{1 \leq j < i \leq n}$.

a) Montrer que $\dim F \leq n - 1$.

b) On suppose que les vecteurs $v_1, ..., v_n$ sont deux à deux distincts.

On considère $(e_1, ..., e_n)$ la base canonique de E.

Pour $1 \leq k \leq n$, on note p_k la projection sur $H_k = \operatorname{Vect}(e_1, ..., e_{k-1}, e_{k+1}, ..., e_n)$ parallèlement à $\mathbb{R}e_k$.

Montrer qu'il existe k tel que les vecteurs $p_k(v_1)$, $p_k(v_2)$, ..., $p_k(v_n)$ sont deux à deux distincts.

Suggestion : Chercher k de sorte que $\varphi_k : F \to H_k \quad x \longmapsto p_k(x)$ ait une propriété particulière.

TD Oral 06. Corrigé

1) On écrit M comme somme d'une matrice triangulaire supérieure A et d'une matrice triangulaire inférieure B et sorte que les coefficients diagonaux de A soient deux à deux distincts et que les coefficients diagonaux de B soient deux à deux distincts. Il s'agit donc de trouver les coefficients diagonaux λ_j et μ_j de A et B de sorte que $\lambda_j + \mu_j = m_{jj}$. On construit (λ_j, μ_j) par récurrence forte sur j de sorte que $\lambda_j \notin \{\lambda_1, ..., \lambda_{j-1}\}$ et $\mu_j \notin \{\mu_1, ..., \mu_{j-1}\}$.

Exemple : $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ somme de deux matrices de projections.

2) a) $\lambda \in \mathbb{C}$ admet deux racines carrées distinctes ssi $\lambda \neq 0$.

D'autre part, si $\lambda \neq \mu$, les racines carrées de λ sont naturellement distinctes de celles de μ.

Donc une CNS est : $\lambda_1, ..., \lambda_p$ non nuls.

b) On pose $\pi(X) = \prod_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A^2)} (X - \lambda) = \prod_{k=1}^{p} (X - \lambda_k)$, où $\mathrm{Sp}(A^2) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$.

On a donc $\prod_{k=1}^{p} (A^2 - \lambda_k\ I_n) = 0$, c'est-à-dire $P(X) = \prod_{k=1}^{p} (X^2 - \lambda_k)$ annule A.

Comme A est inversible, A^2 est inversible, donc les λ_k sont non nuls.

Par a), $P(X)$ est scindé à racines simples. Donc A est diagonalisable.

b) On peut considèrer $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a A non diagonalisable et $A^2 = O_2$ diagonale.

c) On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sans valeur propre réelle. Et $A^2 = -I_2$ diagonale.

2) bis) Supposons A diagonalisable. Alors A^2 est diagonalisable et $\mathrm{Ker}\, A = E_0 = \mathrm{Ker}\, A^2$.

(on se ramène au cas d'une matrice diagonale).

Réciproquement, supposons A diagonalisable et $\mathrm{Ker}\, A = \mathrm{Ker}\, A^2$.

A et A^2 commutent, donc les sev propres E_λ de A^2 sont stables par A.

En considérant les restrictions sur les E_λ, on se ramène donc au cas où $A^2 = \lambda I$.

Lorsque $\lambda \neq 0$, A est diagonalisable (car $X^2 - \lambda$ est scindé à racines simples).

Lorsque $\lambda = 0$, A est nulle car $\mathrm{Ker}\, A^2 = \mathrm{Ker}\, A$.

3) a) i) Posons $\chi_A(x) = \prod_{i=1}^{n} (x - \lambda_i)$ scindé (car on est dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$).

Donc $\chi_A(B) = \prod_{i=1}^{n} (B - \lambda_k I_n)$. Comme $\lambda_k \in \mathrm{Sp}(A)$, alors $\lambda_k \notin \mathrm{Sp}(B)$, donc $B - \lambda_k I_n$ est inversible.

Un produit de matrices inversibles est inversible, donc $\chi_A(B)$ est inversible.

ii) Par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$, on a $AM^k = M^k B$.

En effet, si $A^k M = MB^k$, alors $A^{k+1} M = A(A^k M) = A(MB^k) = (AM)M^k = (BM)M^k = BM^{k+1}$.

Par linéarité, on obtient $P(A)M = MP(B)$ pour tout polynôme P.

En prenant $M = \chi_A$ et sachant que $\chi_A(A) = O_n$ (Cayley-Hamilton), alors $O_n = M\chi_A(B)$.

Par i), $\chi_A(B)$ est inversible, donc $M = O_n$.

b) Par a), (ii) implique (i). Montrons que (i) implique (ii) par la première méthode.

Il existe $\lambda \in \mathrm{Sp}(A) \cap \mathrm{Sp}(B)$. Comme B et B^T ont même polynôme caractéristique, alors $\lambda \in \mathrm{Sp}(B^T)$.

Il existe des vecteurs X et Y non nuls tels que $AX = \lambda X$ et $B^T Y = \lambda Y$., c'est-à-dire $Y^T B = \lambda Y$.

On prend alors $M = XY^T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 1. Et on a $AM = \lambda M = MB$.

4) a) $(v_i - v_j) = (v_i - v_1) - (v_j - v_1)$, donc $F = \mathrm{Vect}(v_i - v_1)_{1 \leq i \leq n} = \mathrm{Vect}(v_i - v_1)_{2 \leq i \leq n}$.
Donc $\dim F = \mathrm{rg}(v_i - v_1)_{2 \leq i \leq n} \leq n - 1$.

b) Il suffit de trouver k telle l'application linéaire $\varphi_k : F \to H_k \quad x \longmapsto p_k(x)$ soit injective
(en effet, pour $i \neq j$, le vecteur $v_j - v_i$ n'est pas nul, donc on aura bien $\varphi(v_j) \neq \varphi(v_i)$).
Or, $\mathrm{Ker}\, \varphi_k = F \cap (\mathrm{Ker}\, p_k) = F \cap \mathbb{R}e_k$. Il suffit donc de trouver k tel que $F \oplus \mathbb{R}e_k$.
Si on avait $e_k \in F$ pour tout k, alors $E = F$, ce qui contredirait $\dim F < n$. Donc k existe.