TD Oral 05. Les corrigés sont en fin de sujet

0) (*inspiré oral Centrale*)

a) Soient A et $B \in \mathcal{M}_n(K)$. Montrer que $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Montrer que les seules formes linéaires φ sur $\mathcal{M}_n(K)$ vérifiant $\varphi(MN) = \varphi(NM)$ sont les $\lambda \operatorname{tr}$.

1) (*Mines*) Soit H un hyperplan de $\mathcal{M}_n(K)$.

a) Montrer qu'il existe $A \in \mathcal{M}_n(K)$ non nulle telle que $M \in H$ ssi $\operatorname{tr}(AM) = 0$.

b) (★) On suppose $n \geq 2$. Montrer que H contient au moins une matrice inversible.

2) (X) Soit $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right) \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$, avec $A, B, C, D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

On suppose que A et B commutent. On veut montrer que $\det M = \det(DA - CB)$.

a) Montrer la propriété dans le cas où A est inversible.

b) (★) Traiter le cas général en considérant $A_k = A - \dfrac{1}{k} I_n$.

3) (X) Soit $u \in GL(E)$ un automorphisme d'un K-espace vectoriel E de dimension finie.

On suppose que pour tout $x \in E$, $\left\{u^k(x),\, k \in \mathbb{N}\right\}$ est fini.

Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = \operatorname{Id}$.

4) Montrer que la série $\sum \dfrac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}$ diverge, où log désigne le logarithme en base 2.

Remarque : Par un raisonnement analogue (cf TD oral 04), on montre que $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

TD Oral 05. Corrigé

0) a) On a $\operatorname{tr}(AB) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n b_{ji}a_{ij} = \operatorname{tr}(BA)$.

b) Supposons que φ vérifie $\varphi(MN) = \varphi(NM)$.

L'idée est de noter que φ est entièrement définie par la connaissance des $\varphi(E_{ij})$, où les E_{ij} sont les matrices canoniques. Il s'agit donc de prouver que $\varphi(E_{ij}) = 0$ si $i \neq j$ et que les $\varphi(E_{ii})$ sont égaux.

On a alors en particulier $\varphi(E_{ij}E_{jk}) = \varphi(E_{jk}E_{ij})$, c'est-à-dire $\varphi(E_{ik}) = \varphi(\delta_{ik}E_{jj}) = \delta_{ik}\varphi(E_{jj})$.
Avec $k = i$, on obtient $\varphi(E_{ii}) = \varphi(E_{jj})$. Donc il existe λ tel que $\varphi(E_{ii}) = \lambda$ pour tout i.
Avec $k \neq i$, on obtient $\varphi(E_{ik}) = 0$. D'où $\varphi(M) = (\sum_i \sum_j m_{ij}E_{ij}) = \lambda \sum_i m_{ii} = \lambda \operatorname{tr}(M)$. Ainsi, $\varphi = \lambda \operatorname{tr}$.

La réciproque est connue, puisqu'on sait que $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM)$.

1) a) H est un hyperplan, donc le noyau d'une forme linéaire $\varphi : \mathcal{M}_n(K) \to K$ non nulle.

On peut identifier $\mathcal{M}_n(K)$ et $K^{(n^2)}$.
Donc toute forme linéaire sur $\mathcal{M}_n(K)$ est de la forme $M \longmapsto \sum_{i,j} a_{ij}m_{ji} = \operatorname{tr}(AM)$.
Comme φ n'est pas nulle, alors A n'est pas nulle.

b) Il s'agit de trouver une matrice inversible telle que $\operatorname{tr}(AM) = 0$.
On trouve aisément une matrice B de trace nulle et de même rang r que A.
On a alors $A = PBQ$. On prend alors $M = Q^{-1}P^{-1}$, car on a alors $\operatorname{tr}(AM) = \operatorname{tr}(BP^{-1}P) = \operatorname{tr}(B) = 0$.

2) a) On suppose d'abord A inversible. On a $\left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} I_n & -A^{-1}B \\ \hline O_n & I_n \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} A & O_n \\ \hline C & D - CA^{-1}B \end{array}\right)$.
Comme $AB = BA$, alors $A^{-1}B = BA^{-1}$.
Donc $\det M = \det(D - CA^{-1}B)(\det A) = \det(DA - CB)$.

b) Pour k assez grand, $\frac{1}{k} \notin \operatorname{Sp}(A)$, donc A_k est inversible.
Comme A_k commute avec B, on a $\det(M_k) = \det(DA_k - CB)$.
Par continuité du déterminant et du produit matriciel, on obtient $\det M = \det(DA - CB)$.

3) Fixons $x \in E$. Par le principe des tiroirs, il existe $j < k$ tels que $u^j(x) = u^k(x)$.
Comme u est bijective, on obtient $u^{k-j}(x) = x$.

Ainsi, pour tout $x \in E$, il existe $p_x \in \mathbb{N}$ tel que $u^{p_x}(x) = x$.

Il reste à trouver un entier p indépendant de x.

On note qu'étant donnés une famille FINIE $(x_1, ..., x_n)$ d'éléments de E, on peut trouver un entier $p \in \mathbb{N}$ vérifiant $\forall x \in \{x_1, ..., x_n\}$, $u^p(x) = x$ en prenant $p = \operatorname{ppcm}(p_{x_1}, ..., p_{x_n})$.

Comme u est linéaire, on obtient alors $\forall x \in \operatorname{Vect}(x_1, ..., x_n)$, $u^p(x) = x$.

Or, E est de dimension finie, donc il suffit pour conclure de considérer une base $(x_1, ..., x_n)$ de E.

4) On pose $\boxed{S(n) = \sum_{k=1}^n \dfrac{(-1)^{\lfloor \log n \rfloor}}{n}}$.

Pour p entier pair, on a $S(2^{p+1}) - S(2^p) = \sum_{k=2^p}^{2^{p+1}-1} \dfrac{1}{n} \geq \dfrac{2^{p+1} - 2^p}{2^{p+1}} = \dfrac{1}{2}$.
Donc $(S(n))_{n \in \mathbb{N}}$ diverge : si elle convergeait vers L, on aurait $\lim_{n \to +\infty} S(2^{p+1}) - S(2^p) = L - L = 0$.