TD Oral 04

1) a) Soit $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue et périodique de période T. On suppose $m = \dfrac{1}{T}\int_0^T f(t)\ dt \neq 0$.

On pose $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$. Donner un équivalent de $F(x)$ en $+\infty$.

b) (*Centrale*) On considère $G(x) = \int_0^x \dfrac{|\sin t|}{t}\ dt$.

Donner un équivalent de $G(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

2) *Les deux questions sont indépendantes.*

a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $R_n = \sum_{k=0}^n \sqrt{\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{k}{n}}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{R_n}{n}$.

b) (*inspiré oral X*) On pose $S_n = \sum_{k=0}^n \dfrac{1}{\sqrt{1/n^2 + k/n}}$. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n}$.

((*Complément : énoncé X* : $S_n = \sum_{x\in A_n} \dfrac{1}{\sqrt{x-\sqrt{2}}}$, où $A_n = \left\{\dfrac{k}{n} \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } \sqrt{2} \leq \dfrac{k}{n} \leq \sqrt{2}+1\right\}$.

Prouver que $\left(\dfrac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ est bornée. Il faut noter que $\forall k \in \mathbb{N}$, $\left|\dfrac{k}{n} - \sqrt{2}\right| \geq \dfrac{1}{n^2\sqrt{2}}$)).

3) Soit $f : [1,+\infty[\to \mathbb{R}$ de classe C^1.

a) (*Centrale*) Montrer que $\left|f(n) - \int_n^{n+1} f(t)\ dt.\right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\ dt.$

Indication : Utiliser une IPP ou la formule de Taylor-Lagrange avec reste intégral.

b) (*X*) On suppose que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et que f' est intégrable sur $[1,+\infty[$.

Montrer que $\sum f(n)$ converge ssi $\int_1^{+\infty} f(t)\ dt$ converge.

Exemple d'utilisation : La série $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge, car $\int_1^x \dfrac{\sin(\ln t)}{t}\ dt = 1 - \cos(\ln x)$ diverge en $+\infty$.

Remarque : Preuve directe que $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge : on pose $a_k = \exp\left(\dfrac{\pi}{3} + 2k\pi\right)$ et $b_k = \exp\left(\dfrac{2\pi}{3} + 2k\pi\right)$.

On a $\forall k \in \mathbb{N}$, $\sum_{a_k\leq n\leq b_k} \dfrac{\sin(\ln n)}{n} \geq \dfrac{1}{2}\sum_{a_k\leq n\leq b_k} \dfrac{1}{n} \geq \dfrac{1}{2}\ln\left(\dfrac{b_k}{a_k}\right) = \dfrac{\pi}{6}$, donc $\sum \dfrac{\sin(\ln n)}{n}$ diverge.

4) (*Centrale*) *Exemple de fonction intégrable de classe C^∞ ne convergeant pas vers 0 en $+\infty$.*

a) Pour $a > 0$, on pose $I(a) = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1 + a(\sin t)^2}\ dt$. Avec $u = \tan t$, montrer que $I(a) = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

b) Montrer que $\int_0^{+\infty} \dfrac{dt}{1 + t^4(\sin t)^2}$ converge.

Corrigé

1) a) Avec $x = nT + r$, où $n = \left\lfloor \dfrac{x}{T} \right\rfloor$, on a $F(x) = n\int_0^\pi f + \int_0^r f = nM + \int_0^r f$, où $M = \int_0^T f$.

Comme $\left|\int_0^r f\right| \leq \int_0^r |f| \leq \int_0^T |f|$, alors $F(x) = n\ M + O_{+\infty}(1)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

Comme $nT \sim_{+\infty} x$ lorsque $x \to +\infty$, alors $F(x) \sim_{+\infty} \dfrac{Mx}{T} = mx$ lorsque x tend vers $+\infty$.

b) On peut noter que la fonction G est croissante. On va évaluer les $G(n\pi)$.

On utilise la π-périodicité de $|\sin|$ et le fait que $t \longmapsto \dfrac{1}{t}$ décroît *lentement*.

$\forall n \in \mathbb{N}$, $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin t|}{(n+1)\pi}\ dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin t|}{t}\ dt \leq \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{|\sin t|}{n\pi}\ dt = \dfrac{1}{n\pi} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin t|\ dt = \dfrac{2}{n\pi}$.

Donc $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{2}{k\pi} \leq G(n\pi) \leq G(\pi) + \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{2}{k\pi}$.

On sait que $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k} \sim \ln n$. Par pincement, $G(n\pi) \sim \dfrac{2}{\pi} \ln n$.

Tout x réel est compris entre $n\pi$ et $(n+1)\pi$, où $n = \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor$.

Comme $G(n\pi) \sim G((n+1)\pi)$ lorsque n tend vers $+\infty$, alors par pincement

$$G(x) \sim \frac{2}{\pi} \ln \left\lfloor \frac{x}{\pi} \right\rfloor \sim \frac{2}{\pi} \ln x \text{ lorsque } x \to +\infty$$

En effet, $\ln \left\lfloor \dfrac{x}{\pi} \right\rfloor = \ln(\dfrac{x}{\pi} + O(1)) = \ln x - \ln \pi + \ln(1 + O_{+\infty}(1/x)) = \ln x + O_{+\infty}(1)$.

2) a) L'application $x \longmapsto \sqrt{x}$ est continue sur $[0,1]$.

Par les sommes de Riemann, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{R_n}{n} = \int_0^1 \sqrt{x}\ dx = \left[\dfrac{2}{3} x^{3/2}\right]_0^1 = \dfrac{2}{3}$.

Rappel : Soit f continue sur $[a,b]$.

Soient $(x_0, ..., x_n)$ une subdivision de $[a,b]$ de pas $\Delta = \max(x_k - x_{k-1})$ et de spoints $y_k \in [x_{k-1} x_k]$. Alors

$$\lim_{\Delta\to 0} \sum_{k=1}^{n} (x_k - x_{k-1})\ f(y_k) = \int_a^b f(t)\ dt$$

En particulier, sur $[0,1]$, $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(y_k) = \int_0^1 f(t)\ dt$, où $y_k \in \left[\dfrac{k-1}{n}, \dfrac{k}{n}\right]$ pour $1 \leq k \leq n$.

b) On ne peut pas appliquer les sommes de Riemann à la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

On va utiliser le fait que f est décroissante et la comparaison entre sommes et intégrales.

Il faut prendre garde au cas particulier $k = 0$.

On a $\int_{1/n}^{1+1/n} \dfrac{dx}{\sqrt{1/n^2 + x}} \leq \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1/n^2 + k/n}} \leq \int_0^1 \dfrac{dx}{\sqrt{1/n^2 + x}}$.

On obtient $2\left[\sqrt{1/n^2 + x}\right]_{1/n}^{1+1/n} \leq \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1/n^2 + k/n}} \leq 2\left[\sqrt{1/n^2 + x}\right]_0^1$.

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} \sum_{k=\mathbf{1}}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{1/n^2 + k/n}} = 2$. On en déduit $\lim_{n\to+\infty} \dfrac{S_n}{n} = 1 + 2 = 3$.

3) a) On note F une primitive de f.

Par Taylor-Lagrange, on a : $F(n+1) - F(n) - F'(n) = \int_n^{n+1} (n+1-t) F''(t)\ dt$.

Donc $\left|\int_n^{n+1} f(t)\ dt - f(n)\right| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\ dt$, car $\forall t \in [n, n+1]$, $0 \leq n+1-t \leq 1$.

b) On a $\int_n^{n+1} f(t)\ dt = f(n) + \varepsilon_n$, où $|\varepsilon_n| \leq \int_n^{n+1} |f'(t)|\ dt$ par a).

Comme f' est intégrale, alors la série $\sum \varepsilon_n$ converge absolument.

Donc $\boxed{\text{les séries } \sum \int_n^{n+1} f(t)\ dt \text{ et } \sum f(n) \text{ sont de même nature}}$ (si l'une converge, l'autre converge).

La série $\sum \int_n^{n+1} f(t)\ dt$ est la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$, où $F(x) = \int_0^x f(t)\ dt$.

On veut désormais prouver que $\sum \int_n^{n+1} f(t)\ dt$ converge ssi $\int_0^{+\infty} f(t)\ dt$ existe :

autrement dit, il s'agit de prouver que la suite $(F(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge ssi F admet une limite en $+\infty$.

Le sens réciproque est immédiat.

Pour le sens direct, pour $x \geq 1$ et $n = \lfloor x \rfloor$, on a : $|F(x) - F(n)| \leq \sup_{[n,n+1]} |F'| = \sup_{[n,n+1]} |f|$.

Or, f tend vers 0 en $+\infty$, donc $|F(x) - F(n)| \to 0$, et ainsi, F converge vers $L = \lim_{n\to+\infty} F(n)$.

4) a) $I(a) = \int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1 + a(\sin t)^2}\ dt = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1 + au^2/(1+u^2)} \dfrac{du}{1+u^2} = \int_0^{+\infty} \dfrac{1}{1 + (1+a)u^2/} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{a+1}}$.

b) $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \dfrac{dt}{1 + t^4(\sin t)^2} \leq \int_{n\pi}^{n\pi+\pi} \dfrac{dt}{1 + (n\pi)^4(\sin t)^2} = \int_0^{\pi} \dfrac{dt}{1 + (n\pi)^4(\sin t)^2}$, car $\sin^2$ est π-périodique.

Comme $\sin(\pi - t) = \sin(t)$, alors $u_n \leq 2\int_0^{\pi/2} \dfrac{dt}{1 + (n\pi)^4(\sin t)^2} = \dfrac{\pi}{\sqrt{(n\pi)^4 + 1}}$ par a), donc $u_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.