TD Oral 03. Les corrigés sont en fin de sujet

1) On note E_0 l'ensemble des fonctions continues sur $[0, 1]$.

On note E_1 l'ensemble des fonctions de classe C^1 sur $[0, 1]$.

On note E_1' l'ensemble des fonctions g de classe C^1 sur $[0, 1]$ vérifiant $g(0) = g(1) = 0$.

a) Soit $f \in E_0$ telle que $\forall g \in E_1'$, $\int_0^1 f(t)g(t)\, dt = 0$. Montrer que $f = 0$.

b) (*Oral X 2024*) Déterminer les fonctions $f \in E_1$ telle que $\forall g \in E_1'$, $\int_0^1 f(x)(g'(x) - xg(x))\, dx = 0$.

2) (*extrait X*)

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il existe un unique réel $x \geq 1$ vérifiant $x \ln x + x = n$. On le note a_n.

b) Montrer que $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ et que $a_n \sim \dfrac{n}{\ln n}$.

c) Montrer que $a_n = \dfrac{n}{\ln n} + O\left(\dfrac{n\ \ln \ln n}{(\ln n)^2}\right)$.

3) (*extrait écrit X 2022 et oral X 2024*)

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe dans chacun des trois cas suivants :

a) f est continue

b) f est croissante

c) f est continue par morceaux et il existe g continue telle que $f + g$ est croissante.

TD Oral 03. Corrigé

1) a) *Remarque* : Si g décrivait E_0, il suffirait de prendre $g = f$: on aurait $\int_0^1 f^2 = 0$, donc $f = 0$.

On suppose par l'absurde f non nulle. Il existe x_0 tel que $f(x_0) \neq 0$.

Quitte à considérer $-f$, on peut supposer $f(x_0) > 0$.

Il existe donc par continuité $0 \leq a < b \leq 1$ tels que $\forall x \in]a, b[,\ f(x) > 0$.

On considère alors $g : x \longmapsto (x-a)^2(b-x)^2$ si $x \in [a, b]$, et 0 sinon.

On obtient alors $\int_0^1 f(t)g(t)\ dt = \int_a^b f(t)(t-a)^2(b-t)^2\ dt > 0$, ce qui contredit l'hypothèse.

b) Par IPP, on obtient la CNS : $\forall g \in E_1',\ \int_0^1 (f'(x) + xf(x))\, g(x)\ dx = 0$.

Par a), les solutions sont les fonctions vérifiant $f'(x) = xf(x)$, c'est-à-dire les $f(x) = K\exp(-x^2/2)$, où $K \in \mathbb{R}$.

2) a) L'application $\varphi : x \longmapsto x\ln x + x$ est une bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

b) Soit $M \in \mathbb{R}^+$. Pour $n \geq \varphi(M)$, alors $a_n \geq M$. Donc $\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Variante : $a_n = \varphi^{-1}(n) \to +\infty$ car φ^{-1} bijection strictement croissante de $[1, +\infty[$ sur $[1, +\infty[$.

On en déduit $a_n \ln a_n \sim a_n \ln a_n + a_n = n$.

On a $\ln(x\ln x + x) \sim_{+\infty} \ln x$, d'où $\ln a_n \sim_{+\infty} \ln n$.

D'où $a_n \sim_{+\infty} \dfrac{n}{\ln a_n} \sim_{+\infty} \dfrac{n}{\ln n}$, c'est-à-dire $a_n = \dfrac{n}{\ln n}(1 + \mathfrak{o}\ (1))$.

c) Donc $a_n = \dfrac{n}{1 + \ln(a_n)} = \dfrac{n}{\ln n - \ln\ln n + 1 + \mathfrak{o}\,(1)} = \dfrac{n}{\ln n + O(\ln\ln n)} = \dfrac{n}{\ln n} + O\left(\dfrac{n\ln\ln n}{(\ln n)^2}\right)$.

On a $\ln a_n = \ln\left(\dfrac{n}{\ln n}\right) + \ln\left(1 + O\left(\dfrac{\ln\ln n}{\ln n}\right)\right) = \ln n - \ln\ln n + O\left(\dfrac{\ln\ln n}{\ln n}\right)$.

3) (*extrait écrit X 2022 et oral X 2024*)

Soit $f : [0, 1] \to [0, 1]$. Montrer que f admet un point fixe dans chacun des trois cas suivants :

a) On applique le TVI à $g(x) = f(x) - x$.

b) On considère $\lambda = \sup A$, où $A = \{x \in [0, 1] \mid f(x) \geq x\}$, qui existe car $0 \in A$.

- On a $f(\lambda) \leq \lambda$: immédiat si $\lambda = 1$, et sinon, pour tout $x > \lambda$, $f(x) < x$.

On conclut par limite à droite : $f(\lambda) \leq \lim_{x\to\lambda, x>\lambda} f(x) \leq \lim_{x\to\lambda, x>\lambda} x = \lambda$.

- On a $f(\lambda) \geq \lambda$: Immédiat si $\lambda \in A$, et sinon λ est limite par défaut d'une suite d'éléments de A : on a $f(a_n) \geq a_n$ et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lambda^-$, et on conclut par limite à gauche.

c) Le raisonnement du b) convient, car f admet aussi des limites à droite et à gauche en tout point (sauf en 0 ou 1), et on a encore $\lim_{x\to\lambda, x<\lambda} f(x) \leq f(\lambda) \leq \lim_{x\to\lambda, x>\lambda} f(x)$.