TD Oral 02. Les corrigés sont en fin de sujet

1) (*écrit Mines*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère $A_n = \dfrac{1}{2^n}\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$.

On suppose connue la formule de Stirling : $n! \sim \sqrt{2\pi n}\; n^n e^{-n}$ lorsque $n \to +\infty$.

En particulier, on a $\binom{2m}{m} = \dfrac{(2m)!}{(m!)^2} \sim \dfrac{\sqrt{4\pi m}(2m)^{2m}e^{-2m}}{2\pi m \times m^{2m}e^{-2m}} = \dfrac{2^{2m}}{\sqrt{\pi m}} = 2^n\sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$ avec $n = 2m$.

Déterminer un équivalent de lorsque $n \to +\infty$.

2) (*inspiré oral Centrale*) Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère $f(t) = \dfrac{\sin(nt)}{\sin t}$.

a) Déterminer l'ensemble de définition de f en précisant ses prolongements par continuité.

b) Calculer $\int_0^{2\pi} f(t)\; dt$.

Indication : Noter que pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$, $\int_0^{2\pi} \exp(ikt)\; dt = \begin{cases} 0 \text{ si } k \in \mathbb{Z}^* \\ 2\pi \text{ si } k = 0 \end{cases}$

En effet, si $k \neq 0$, une primitive de $t \longmapsto \exp(ikt)$ est $\dfrac{1}{ik}\exp(ikt)$, qui est 2π-périodique.

3) Soit des réels a et b tels que $a \leq 0 \leq b$.

a) Soit $x \in [a, b]$. Écrire x comme valeur moyenne de a et b.

b) (*extrait écrit ENS MP*)

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $[a, b]$, et telle que $E(X) = 0$.

Montrer les deux inégalités suivantes :

(i) Montrer que pour tout réel t, on a : $E(\exp(tX)) \leq \dfrac{b\exp(ta) - a\exp(tb)}{b - a}$.

(ii) Montrer que $E(X^2) \leq -ab$.

4) (X) Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée.

On suppose $\lim_{n\to+\infty}\left(v_n - \dfrac{1}{2}v_{2n}\right) = \dfrac{1}{2}$. Étudier la convergence de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

TD Oral 02. Corrigé

1) Posons $A_n = 2^n\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$. On a $A_{2m} = \dfrac{1}{2^{2m}}\binom{2m}{m} = \dfrac{1}{2^{2m}}\dfrac{(2m)!}{(m!)^2} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi m}} = \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$.

On pourrait faire de même pour n impair. Mais il vaut mieux éviter le terme $(2m+1)^{2m+1} \sim e(2m)^{2m}$ ...

On a en fait : $A_{2m+1} = \dfrac{1}{2^{2m+1}}\binom{2m+1}{m} = \dfrac{2m+1}{2m}\dfrac{1}{2^{2m}}\dfrac{(2m)!}{(m!)^2} = \dfrac{2m+1}{2m}A_{2m} \sim A_{2m} \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$.

On en conclut par la remarque ci-dessous que $A_n \sim \sqrt{\dfrac{2}{\pi n}}$.

Remarque : Lorsque $x_{2m} \to L$ et $x_{2m+1} \to L$, alors $x_n \to L$.

En effet, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe m_0 et m_1 tels que $\forall m \geq m_0$, $|x_{2m} - L| \leq \varepsilon$ et $\forall m \geq m_1$, $|x_{2m+1} - L| \leq \varepsilon$.

Donc $\forall n \geq \max(2m_0, 2m_1 + 1)$, $|x_n - L| \leq \varepsilon$.

Ainsi, avec $x_n = \dfrac{A_n}{B_n}$, on a : si $A_{2m} \sim B_{2m}$ et $A_{2m+1} \sim B_{2m+1}$, alors $A_n \sim B_n$. Ici, $B_n = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$.

2) a) f est C^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z}$ comme quotient de fonctions C^∞.

En 0, on a $\sin(nt) \sim nt$ et $\sin t \sim t$, donc $f(t) \sim n$ en $t = 0$.

Donc f est prolongeable par continuité en $t = 0$, en posant $f(0) = 0$.

Comme $f(t+\pi) = (-1)^{(n-1)k} f(t)$, alors f est prolongeable par continuité en tout $t \in \pi\mathbb{Z}$.

Donc f est définie et continue sur $\mathbb{R}$ (en prolongeant par $(-1)^{(n-1)k}$ en $t = k\pi$).

b) Pour $t \notin \pi\mathbb{Z}$, on a $f(t) = \dfrac{\sin(nt)}{\sin t} = \dfrac{e^{int} - e^{-int}}{e^{it} - e^{-it}} = \dfrac{(e^{it})^n - (e^{-it})^n}{e^{it} - e^{-it}}$.

Comme $\dfrac{x^n - y^n}{x - y} = \sum_{k=0}^{n-1} x^k y^{n-1-k}$, alors $f(t) = \sum_{k=0}^{n-1} (e^{it})^{2k-n+1}$.

Lorsque k décrit $\{0, 1, ..., n-1\}$, $2k - n + 1$ est un entier relatif, et vaut 0 ssi $k = \dfrac{n-1}{2}$.

On obtient $\int_0^{2\pi} f(t)\, dt = \begin{cases} 2\pi \text{ si } n \text{ est impair} \\ 0 \text{ si } n \text{ est pair} \end{cases}$

3) a) Pour $x \in [a, b]$, on a $x = \lambda a + (1-\lambda) b$, avec $\lambda = \dfrac{b-x}{b-a} \in [0,1]$ et $1 - \lambda = \dfrac{x-a}{b-a} \in [0, 1]$.

b) (i) Soit $t \in \mathbb{R}$. La fonction $f : t \longmapsto \exp(tx)$ est convexe (car $f'' \geq 0$).

Par a), on a donc $\forall x \in [a, b]$, $\exp(tx) \leq \dfrac{b-x}{b-a} \exp(ta) + \dfrac{x-a}{b-a} \exp(tb)$.

Ainsi, $\exp(tX) \leq \dfrac{b-X}{b-a} \exp(ta) + \dfrac{X-a}{b-a} \exp(tb)$.

En passant à l'espérance, et avec $E(X) = 0$, on conclut $E(\exp(tX)) \leq \dfrac{b\exp(ta) - a\exp(tb)}{b-a}$.

(ii) *Première preuve* : Une méthode consiste à utiliser (i) et faire un $DL_2(0)$:

On montre que $E(\exp(tX)) = 1 + \dfrac{1}{2} t^2 E(X^2) + \mathfrak{o}\,(t^2)$: on utilise Taylor-Lagrange (à l'ordre 3).

Et d'autre part, $\dfrac{b\exp(ta) - a\exp(tb)}{b-a} = 1 + \dfrac{1}{2} \dfrac{ba^2 - ab^2}{b-a} + \mathfrak{o}\,(t^2) = 1 - \dfrac{1}{2} ab + \mathfrak{o}\,(t^2)$.

Par (i); on a donc $\dfrac{1}{2} t^2 E(X^2) + \mathfrak{o}\,(t^2) \leq -\dfrac{1}{2} ab + \mathfrak{o}\,(t^2)$.
En duvisant par t^2 et pas passage à la limite des inégalités larges, on obtient $E(X^2) = -ab$.

Deuxième preuve : On utilise la même preuve qu'au (i), mais avecla fonction convexe $f(t) = t^2$.

On obtient donc $E(X^2) \leq \dfrac{ba^2 - ab^2}{b-a} = -ab$.

Troisième preuve : On utilise $\forall x \in [a, b]$, $(x-a)(x-b) \leq 0$, c'est-à-dire $x^2 \leq (a+b)x - ab$.

D'où $E(X^2) \leq -ab$.

4) Posons $u_n = \left(v_n - \dfrac{1}{2} v_{2n}\right)$. On a

$$u_n + \frac{1}{2} u_{2n} + \frac{1}{4} u_{4n} + ... + \frac{1}{2^p} u_{n2^p} = v_n - \frac{1}{2^{p+1}} v_{n2^{p+1}}$$

Comme $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, alors $v_n = u_n + \dfrac{1}{2} u_{2n} + \dfrac{1}{4} u_{4n} + ... = \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^p} u_{n2^p}$.

On a $\lim_{n\to+\infty} u_n = \dfrac{1}{2}$. Soit $\varepsilon > 0$. Pour $n \geq n_0$ assez grand, $\left| u_n - \dfrac{1}{2} \right| \leq \varepsilon$.

Pour $n \geq n_0$, on a donc $\left| v_n - \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} \dfrac{1}{2} \right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} \dfrac{1}{2^p} \left| u_{n2^p} - \dfrac{1}{2} \right| \leq \sum_{p=0}^{+\infty} 2^{-p} |\varepsilon|$, c'est-à-dire $|v_n - 1| \leq 2\varepsilon$.

On en déduit $\lim_{n\to+\infty} v_n = 1$.