TD Oral 01. Les corrigés sont en fin de sujet

1) (*extrait oral Centrale*) Soit $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ une application de classe C^1.

a) On suppose $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$. La fonction f admet-elle nécessairement une limite en $+\infty$?

b) On suppose que f admet une limite finie en $+\infty$. A-t-on nécessairement $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$?

2) (*Mines*) Soit $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $f(0) = f(1) = 0$ et $\forall x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq 1$.

Montrer que $\left|\int_0^1 f(x)\, dx\right| \leq \dfrac{1}{4}$. Déterminer les cas d'égalité.

3) (*Centrale*) On considère $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \geq 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \sqrt{n + u_n}$.

Montrer que $u_n = \sqrt{n} + \dfrac{1}{2} + \mathfrak{o}_{+\infty}(1)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

4) (*extrait ENS*) Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, ..., x_n > 0$. On pose $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$. Montrer que $\sum_{(i,j)} \left\{\dfrac{x_i}{x_j}\right\} < \dfrac{3}{4} n^2$.

5) (X) On considère $f(x) = \sum_{n=1}^{N} a_n \sin(2\pi n x)$, avec $a_N \geq 0$.

a) On note m_k le nombre de zéros de $f^{(k)}$ sur $[0, 1[$. En utilisant $e^{2\pi i x}$, montrer que $m_k \leq 2N$.

b) Montrer que $(m_k)_{k\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) Montrer que $m_k = 2N$ pour k assez grand.

6) *Inégalité du réordonnement.* Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et des réels $a_1 < a_2 < ... < a_n$ et $b_1 < b_2 < ... < b_n$.

Pour toute permutation σ de $[\![1, n]\!]$, on pose $S(\sigma) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_{\sigma(i)}$.

a) Cas $n = 2$. Soient des réels $a < a'$ et $b < b'$. Montrer que $ab' + a'b < ab + a'b'$.

b) Montrer qu'il existe une permutation σ telle que $S(s) \leq S(\sigma)$ pour toute permutation s de $[\![1, n]\!]$.

c) Déduire de a) que $\sigma = \mathrm{Id}$.

Corrigé

1) a) *Contre-exemples* : $f(x) = \ln x$ ou bien $f(x) = x^\alpha$, avec $0 < \alpha < 1$.
On peut aussi considérer $f(x) = \sin(\ln x)$. On a $\lim_{n\to+\infty} f'(x) = 0$ et f diverge en $+\infty$.
Remarque : Si $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 0$, alors par Cesàro $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} \int_0^x f'(t)\, dt = 0$, c'est-à-dire $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 0$.

b) *Contre-exemple* : $f(x) = \dfrac{1}{x} \sin(x^2)$. On a $|f(x)| \leq \dfrac{1}{x}$, d'où par pincement, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
On a $f'(x) = 2\cos(x^2) - \dfrac{1}{x^2} \sin(x^2)$.
On a $\lim_{n\to+\infty} f'(\sqrt{2n\pi}) = 2$ et $\lim_{n\to+\infty} f'(\sqrt{2n\pi + \pi}) = -2$. Donc f' diverge en $+\infty$.
Remarque : Pour trouver un contre-exemple $g > 0$, il suffit de considérer $g(x) = f(x) + \dfrac{2}{x}$.

2) - Par l'IAF appliquée d'une part en 0 et d'autre part en 1, on a : $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq x$ et $|f(x)| \leq (1 - x)$.
Donc $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| \leq \varphi(x) = \min(x, 1 - x)$.
On en déduit (faire un schéma) que $\left|\int_0^1 f(x)\, dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx \leq \int_0^1 \varphi(x)\, dx = 2 \times \dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{4}$.

- Il y a égalité ssi on a l'égalité (1) : $\left|\int_0^1 f(x)\, dx\right| \leq \int_0^1 |f(x)|\, dx$ et l'égalité (2) : $\int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$.
Pour avoir l'égalité $\int_0^1 |f(x)|\, dx = \int_0^1 \varphi(x)\, dx$, il faut que $\forall x \in [0, 1]$, $|f(x)| = \varphi(x)$

(en effet, $x \longmapsto \varphi(x) - |f(x)|$ est continue et positive, et d'intégrale nulle, donc identiquement nulle).
Comme φ ne s'annule pas sur $]0,1[$, alors par le TVI, f est de signe constant, donc $f = \varphi$ ou $f = -\varphi$.
Dans les deux cas, f n'est pas C^1. Donc il n'y a pas de cas d'égalité.

Remarque : En revanche, il s'agit de la meilleure majoration possible, car on peut trouver une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de classe C^1 telles que $|f_n'| \leq 1$ et $\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f_n(x)\,dx = \dfrac{1}{4}$. Ainsi, $\dfrac{1}{4}$ est une borne sup.

3) On procède par évaluations *successives de plus en plus fines* : un DA de u_n donne un DA de u_{n+1}.
- On a $\sqrt{x} \leq 1 + x$, donc $u_{n+1} \leq 1 + n + u_n$, donc $u_n = O(n^2)$, donc $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} = O(n)$.
- Donc $u_n = O(n)$. Et $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} = O(\sqrt{n})$. Ainsi, $u_n = O(\sqrt{n})$ et a fortiori $u_n = \mathfrak{o}\,(n)$.
- D'où $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} = \sqrt{n}\sqrt{1+\mathfrak{o}\,(1)} = \sqrt{n}\,(1+\mathfrak{o}\,(1)) = \sqrt{n} + \mathfrak{o}\,(\sqrt{n})$, c'est-à-dire $u_{n+1} \sim \sqrt{n}$.
Comme $\sqrt{n-1} \sim \sqrt{n}$, alors $u_n \sim \sqrt{n}$. c'est-à-dire $u_n = \sqrt{n} + \mathfrak{o}\,(\sqrt{n})$.
- Donc $u_{n+1} = \sqrt{n+u_n} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}} + \mathfrak{o}\,\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^{1/2} = \sqrt{n}\left(1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + \mathfrak{o}\,\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \mathfrak{o}\,(1)$.
Comme $\sqrt{n-1} = \sqrt{n} + \mathfrak{o}\,(1)$, alors $u_n = \sqrt{n-1} + \frac{1}{2} + \mathfrak{o}\,(1) = \sqrt{n} + \frac{1}{2} + \mathfrak{o}\,(1)$.

- *Remarque* : On pourrait naturellement poursuivre le DA.

4) Pour $i = j$, $\left\{\dfrac{x_i}{x_j}\right\} = \{1\} = 0$. Pour $i < j$, $\left\{\dfrac{x_i}{x_j}\right\} + \left\{\dfrac{x_j}{x_i}\right\}$ est de la forme $\{t\} + \left\{\dfrac{1}{t}\right\}$.
Posons $f(t) = \{t\} + \left\{\dfrac{1}{t}\right\}$. On a donc $\sum_{(i,j)} \left\{\dfrac{x_i}{x_j}\right\} = \sum_{i<j} f\left(\dfrac{x_i}{x_j}\right) \leq \dfrac{1}{2}n(n-1)\sup_{t>0} f(t)$.
- Pour $t \geq 2$, on a $\left\{\dfrac{1}{t}\right\} \leq \dfrac{1}{2}$ et comme $\{t\} < 1$, alors $f(t) \leq \dfrac{3}{2}$.
- Pour $1 \leq t < 2$, $f(t) = t - 1 + \dfrac{1}{t} \leq f(2) - 1 = \dfrac{3}{2}$, car f est croissante sur $[1,2]$.
- Le cas $0 < t \leq 1$ se ramène aux cas précédents.

5) On note que la fonction f est 1-périodique. Ainsi, le nombre de zéros de f sur $[a, a+1[$ ne dépend pas de a.
a) On pose $y = \exp(2\pi i x)$. On a $f(x) = \dfrac{1}{2\pi i}\sum_{n=1}^N a_n(y^n - y^{-n}) = \dfrac{1}{2\pi i\ y^N}\sum_{n=1}^N a_n(y^{N+n} - y^{N-n})$.
Donc $f(x) = 0$ revient à résoudre un polynôme d'inconnue y de degré $2N$.
On obtient au plus $2N$ solutions y, et l'application $[0,1[\to\mathbb{C}\quad x \longmapsto y = \exp(2\pi i x)$ est injective.
b) Soit g de classe C^1 et 1-périodique : $g(x+1) = g(x)$. Alors g' est aussi 1-périodique.
Si $a_1 < \ldots < a_r$ sont des zéros de g sur $[0,1[$, on applique Rolle sur $[a_1, \ldots, a_r, a_1+1]$.
On obtient bien r zéros distincts sur $]a_1, a_1+1[$. Donc g' s'annule au moins r fois sur $[0,1[$.
Ainsi, la dérivée g' admet au moins autant de zéros que g.
c) $f^{(k)}(x)$ est de la forme $A\sin(2\pi Nx + k\pi/2) + g(x)$, avec $A > \sup|g|$ pour k assez grand.
Il existe des points $a_0 < a_1 < \ldots < a_{2N} = a_0 + 1$ tels que $\forall j \in [\![0, 2N]\!]$, $\sin(2\pi N a_j + k\pi/2) = (-1)^j$.
On a alors $f^{(k)}(a_j)$ du signe de $(-1)^j$, donc par le TVI, $f^{(k+1)}$ admet $2N$ zéros sur $[a_0, a_0+1[$.
On en conclut que $m_k \geq 2N$ pour k assez grand. On conclut avec a).

6) a) On a $ab + a'b' - ab' - a'b = (a'-a)(b'-b) > 0$.
b) L'ensemble de permutations est non vide est fini. Donc l'ensemble des $S(s)$ admet un maximum.
c) Supposons par l'absurde $\sigma \neq \mathrm{Id}$. Alors il existe $i < j$ tels que $\sigma(i) > \sigma(j)$.
Par a), $a_i b_{\sigma(i)} + a_j b_{\sigma(j)} < a_i b_{\sigma(j)} + a_j b_{\sigma(i)}$.
Donc $S(\sigma) < S(\widehat{\sigma})$, où $\widehat{\sigma}$ est la permutation définie par $\begin{cases} \widehat{\sigma}(i) = \sigma(j) \text{ et } \widehat{\sigma}(j) = \sigma(i) \\ \widehat{\sigma}(k) = \sigma(k) \text{ si } k \notin \{i,j\} \end{cases}$
D'où une contradiction. Ainsi, on a bien $\sigma = \mathrm{Id}$.