Oraux. Série n°33. Indications

Lois usuelles

1) $X+Y$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda+\mu$.

On a $P(X=k \mid X+Y=n)=\dfrac{P(X=k \mid Y=n-k)}{P(X+Y=n)}=\dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}\dfrac{e^{-\lambda}\mu^{n-k}}{(n-k)!}\dfrac{n!}{e^{-(\lambda+\mu)}(\lambda+\mu)^n}$

Donc $P(X=k \mid X+Y=n)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}$, avec $p=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}$ et $q=1-p$.

1) bis) a) $P(Y=k,X=n)=P(Y=k \mid X=n)P(X=n)=\binom{n}{k}p^kq^{n-k}e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}=\frac{1}{k!(n-k)!}p^kq^{n-k}\lambda^ne^{-\lambda}$.

Donc $P(Y=k)=\sum_{n=k}^{+\infty}P(Y=k,X=n)=\frac{1}{k!}p^ke^{\lambda q}\lambda^ke^{-\lambda}=e^{-\lambda p}\frac{(\lambda p)^k}{k!}$.

b) On passe de Y à $X-Y$ en inversant les rôles de p et q. donc $X-Y$ suit une loi de Poisson de paramètre λq.

On a $P(Y=k,Z=n-k)=P(Y=k,X=n)=\frac{p^k\lambda^k}{k!(n-k)!}e^{-p\lambda}\frac{q^{n-k}\lambda^{n-k}}{(n-k)!}e^{-q\lambda}=P(Y=k)P(Z=n-k)$.

c) Par b), on a : $\mathrm{cov}(X-Y,Y)=0$, donc par bilinéarité, $\mathrm{cov}(X,Y)=\mathrm{cov}(Y,Y)=V(Y)=\sigma(Y)^2$.

Donc le coefficient de corrélation linéaire est $r=\frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)}=\frac{\sigma(Y)}{\sigma(X)}=\frac{\sqrt{p\lambda}}{\sqrt{\lambda}}=\sqrt{p}$.

Remarque : La variance d'une loi de Poisson se calcule à l'aide de $G''(1)+G'(1)-G'(1)^2$, où $G(z)=e^{\lambda(z-1)}$.

2) a) A est diagonalisable ssi $a\neq b$.

b) On considère le coefficient X^n de $(X+1)^{a+b}=(X+1)^a(X+1)^b$: D'où $\binom{a+b}{n}=\sum\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}$.

Variante : Toute partie de n éléments dans $\{1,...,a+b\}$ s'écrit de façon unique comme la réunion disjointe d'une partie de k éléments de $\{1,...,a\}$ et d'une partie de $(n-k)$ éléments de $\{b+1,...,a+b\}$.

On somme sur tous les k compris entre 0 et n tels que $k\leq a$ et $n-k\leq b$, ce qui donne $\min(0,n-b)\leq k\leq\max(a,n)$.

Remarque : Un cas particulier classique est $a=b=n$: On obtient $\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\binom{2n}{n}$.

c) $1-p=\sum_{k=0}^nP(X=k)P(Y=k)=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\binom{n}{k}=\frac{1}{2^{2n}}\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}=\frac{1}{2^{2n}}\binom{2n}{n}$.

Extremas

3) a) $P(Y\geq X)=\sum_{k=0}^{+\infty}P(Y\geq k)P(X=k)=\sum_{k=1}^{+\infty}q^{k-1}(pq^{k-1})=\frac{p}{1-q^2}=\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2-p}$.

Or, $P(Y\geq X)+P(X\geq Y)-P(Y=X)=1$ et $P(Y\geq X)=P(Y\geq X)$, d'où $P(Y=X)=2P(Y\geq X)-1=\frac{p}{2-p}$.

b) On a $P(U=k,V=n)=\begin{cases}P(X=n)P(Y=n+k)+P(X=n+k)P(Y=k)=2q^{2n+k-2}p^2 \text{ si } k\neq 0\\ P(X=n)P(Y=n)=q^{2n-2}p^2 \text{ si } k=0\end{cases}$

On en déduit alors les marges de (U,V) : $P(U=k)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(U=k,V=n)$ et de même pour $P(V=n)$.

Les lois U et V sont indépendantes, car $P(U=k,V=n)$ est de la forme $\alpha_k\beta_n$, avec $\beta^n=\frac{1}{1-q^2}q^{2n-2}$.

4) a) On a $P(X>k)=P(U>k)P(V>k)=\left(1-\frac{k}{n}\right)^2$.

Donc $E(X)=\sum_{k=0}^n\left(1-\frac{k}{n}\right)^2=\sum_{k=0}^n\left(\frac{j}{n}\right)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^2}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}$.

b) On a $X+Y=U+V$, donc $E(Y)=2E(U)-E(X)=(n+1)-\frac{(n+1)(2n+1)}{6n}=\frac{(n+1)(4n-1)}{6n}$.

c) On a $XY=UV$, donc $E(XY)=E(U)E(V)=\frac{1}{4}(n+1)^2$, et $\mathrm{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)$.

5) $P(M_n\leq k)=P(\forall i :, x_i\leq k)=\left(\frac{k}{n}\right)^p$, donc $P(M_n=k)=\left(\frac{k}{n}\right)^p-\left(\frac{k-1}{n}\right)^p$, pour tout $k\in[\![1,p]\!]$.

Donc $E(M_n) = \sum_{k=0}^{p} P(M_n > k) = p + 1 - \sum_{k=0}^{p} \left(\frac{k}{p}\right)^n \to p$ lorsque n tend vers $+\infty$.

Sommes

6) On a en développant selon la première colonne : $D_n = \sum_{i=1}^{n} X_{i1} C_{i1}$.

Les cofacteurs $C_{i1} = (-1)^{i-1}\Delta_{i1}$ sont au signe près des déterminants d'ordre $(n-1)$, quxquels on peut appliquer l'hypothèse de récurrence.

Les X_{i1} sont indépendants entre eux et indépendants des C_{i1}.

Donc $E(D_n) = \sum_{i=1}^{n} E(X_{i1})E(C_{i1}) = \sum_{i=1}^{n} 0 \ E(C_{i1}) = 0$.

Et $V(D_n) = E(D_n^2) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} E(X_{i1}X_{j1})E(C_{i1}C_{j1})$: attention, les C_{i1} ne sont pas indépendants.

On obtient : $E(D_n^2) = \sum_{i=1}^{n} 1 \ \times E(C_{i1}^2) = n \ E(D_{n-1}^2)$.

7) On peut utiliser $P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} P(Y = k \mid X = n)P(X = n)$.

La loi conditionnelle de Y sachant $X = n$ est la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$.

D'où $P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \frac{1}{n!} \lambda^n e^{-\lambda} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} \sum_{n=k}^{+\infty} q^{n-k} \frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda} e^{\lambda q} = \frac{(\lambda p)^k}{k!} e^{-\lambda p}$.

Remarque : cf formule de Wald et séries génératrices : $G_Y(z) = G_X(q + pz) = e^{\lambda(q+pz-1)} = e^{\mu(z-1)}$, où $\mu = \lambda p$.

Lois de premiers succès

8) $N = T + S$, où T est le nombre de 0 avant le premier 1, et S est le nombre de 1 consécutifs dans la première séquence de 1. La v.a. T suit une loi géométrique $\mathcal{G}(p)$ et la v.a. S suit une loi géométrique $\mathcal{G}(q)$.

Variante : Montrer avec X_1 que $a_n = P(N = n)$ vérifie la récurrence $a_n = p^n q + q a_{n-1}$ et $a_0 = 0$.

On en déduit (en posant $a_n = q^n b_n$) que $a_n = pq \dfrac{p^n - q^n}{p - q}$.

9) a) $E(N) = P(X_0 = 1) \times \frac{1}{q} + P(X_0 = 0) \times \frac{1}{p} = 2$.

$E(M) = p \times \frac{1}{q} + q \times \frac{1}{p} = \frac{p}{q} + \frac{q}{p}$, car la probabilité que la première séquence soient composés de 1 vaut p.

b) Pour $(n, m) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $P(N = n, M = m) = p^n q^m p + q^n p^m q$, donc N et M indépendantes ssi $p = q = \frac{1}{2}$.

Etude à un pas

10) On a $a_0 = 0$, $a_N = 1$ et $\forall n \in \{1, 2, ..., N-1\}, a_n = q a_{n-1} + p a_{n+1}$, avec $q = 1 - p$.

On reconnaît une suite de type Fibonacci associé à l'équation caractéristique $z = q + pz^2$ de racines 1 et $\tau = \frac{q}{p}$. Si $p \neq \frac{1}{2}$, $\tau \neq 1$, et $a_n = \frac{1-\tau^n}{1-\tau^N}$. Si $p = \frac{1}{2}$, $a_n = \frac{n}{N}$.

Reformulation du problème

11) On mange toutes les pommes une à une, et p est la probabilité que la dernière soit rouge.

On a donc $p = \frac{r}{r+v}$. En termes de dénombrement, $p = \binom{r+v-1}{r-1} / \binom{v}{r}$.

12) a) On considère les 2^{2n} chemins correspondants à des tirages où une choisit telle ou telle urne.

Pour $0 \leq a < n$, $P(X = a)$ est la proportion de chemins rencontrant les bords en les points (a, n) ou (n, a). Or, il y a $2\binom{2n-a-1}{n-1}2^a$ tels chemins. Donc $P(X = a) = \binom{2n-a-1}{n-1} / 2^{2n-a-1}$.

b) On considère les $2\binom{2n}{n}$ chemins montants dans $[\![0,n]\!]^2$, correspondants aux tirages complets des $2n$ objets. Pour $0 \leq a < n$, $P(X=a)$ est la proportion de chemins rencontrant les bords en les points $(n-a,n)$ ou $(n,n-a)$. Or, il y a $2\binom{2n-a-1}{n-1}$ tels chemins.

On a donc $P(X=a) = 2\binom{2n-a-1}{n-1}/2\binom{2n}{n} = \binom{2n-a-1}{n-1}/\binom{2n}{n}$.