Oraux. Série n°32. Probabilités

Lois de probabilité

1) ($\clubsuit$) a) Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'événements incompatibles. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = 0$.

b) Soit P une probabilité sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(\{n\}) = 0$.

2) ($\clubsuit$) Soit X une v.a. ayant un moment d'ordre $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que pour $k \in \{1, 2, ..., n\}$, $E(|X|^k) < +\infty$.

3) ($\clubsuit$) (*Mines*) Soient X et Y deux variables aléatoires admettant des moments d'ordre 2. On suppose $V(X) > 0$. Trouver a et b dans $\mathbb{R}$ minimisant $E((Y - aX - b)^2)$.

4) ($\clubsuit$) On considère $E = \{1, 2, ..., n\}$ muni de la loi uniforme. On pose $n = p_1^{m_1}...p_r^{m_r}$ (facteurs premiers).

a) Montrer que les événements A_i : " p_i divise n " sont mutuellement indépendants.

b) En déduire que le nombre d'entiers de E premiers avec n vaut $\varphi(n) = n\prod_{i=1}^r (1 - \frac{1}{p_i})$.

5) ($\clubsuit$) Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

On suppose que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la loi conditionnelle de X par rapport à l'événement $(Y = n)$ est la loi uniforme sur $\{1, \ldots, n\}$. Montrer que $Y - X + 1$ et X suivent la même loi.

Variables de comptage (= sommes de variables de Bernoulli)

6) ($\clubsuit$) *Nombre de points fixes d'une permutation.* On note S_n l'ensemble des permutations de $\{1, 2, ..., n\}$. Pour $\sigma \in S_n$, on note $X(\sigma)$ le nombre de points fixes de σ. Calculer $E(X)$ et $V(X)$.

6) bis) ($\clubsuit$) (*X-ESPCI*) On considère n couples ($2n$ personnes). r personnes décèdent.

Déterminer le nombre moyen N de couples restants.

7) ($\clubsuit$) On considère un mot informatique composé de X bits. Chaque bit vaut 1 avec une probabilité p.

a) On suppose que X suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$. Donner la loi du nombre Y de bits valant 1.

b) Même question lorsque N suit la loi binomiale $\mathcal{B}(n, r)$, avec $r \in]0, 1[$.

c) Retrouver le résultat du a) en utilisant b) et le théorème des événements rares.

Probabilités sur des ensembles finis et combinatoire

8) ($\clubsuit$) Soit un entier $n \geq 3$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les tire une à une sans remise. On note X le nombre de tirages effectués pour obtenir les boules numérotées $1, 2, 3$. Déterminer la loi de X.

9) ($\bigstar$) a) Montrer que $P(\overline{A_1} \cap ... \cap \overline{A_n}) = \sum_{I\subset\{1,2,...,n\}} (-1)^{(\text{card}\, I)} P(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

b) On munit l'ensemble E des permutations de $[\![1, n]\!]$ de la loi uniforme. Montrer que le nombre d_n de dérangements (c'est-à-dire les permutations sans point fixe) vaut $d_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k}(n-k)! = n! \sum_{k=0}^n (-1)^k \dfrac{1}{k!}$.

10) ($\clubsuit$) On considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue n tirages successifs sans remise. On note X_k le numéro de la boule tirée à la k-ième étape. On dit qu'il y a un pic à la k-ème étape si $X_k > \max(X_1, ..., X_{k-1})$. On convient qu'il y a toujours un pic au premier tirage.

a) On note S_n le nombre de pics au cours des n tirages. Déterminer $P(S_n = 1)$ et $P(S_n = n)$.

b) Soit T_k la variable indicatrice de l'événement: il y a un pic au k-ième tirage.

Déterminer la loi de T_k. Donner l'espérance de S_n.

Variables aléatoires entières

11) ($\bigstar$) Soient X et Y deux v.a. entières indépendantes et de même loi.

Dans quels cas $X+Y$ et $2X$ ont-elles même loi ?

Convergence de variables aléatoires

12) ($\clubsuit$) Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de v.a. indépendantes telles que $\lim_{n\to+\infty} E(X_n) = \mu$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $V(X_n) \leq 1$.

On pose $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$. Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P(\left|\frac{1}{n}S_n - \mu\right| \leq \varepsilon) = 1$.

13) ($\clubsuit$) Soit $x \in [0,1]$. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre x.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de S_n.

b) Soit $f \in C^0([0,1],\mathbb{R}).k$ lispchitzienne. Montrer que $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}$.

13) bis) a) Soit ϕ une fonction K-lispchitzienne sur $[0,1]$. Pour tout $x \in [0,1]$, on suppose connue une famille $(X_n^{(x)})_{n\geq 1}$ de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli $\mathcal{B}(x)$. On pose, pour $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n^{(x)} = \frac{1}{n}(X_1^{(x)} + ... + X_n^{(x)})$. On pose $\phi_n(x) = E(\phi(S_n^{(x)})$. Montrer que $(\phi_n(x))_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge uniformément vers ϕ sur $[0,1]$.

b) En déduire une preuve du théorème de Stone-Weierstrass pour les fonctions lipschitziennes.

14) ($\clubsuit$) *Inégalité sous-gaussienne d'une somme de variables aléatoires de Rademacher*

Soient $X_1, X_2, ..., X_n$ des v.a. mutuellement indépendantes. On pose $S_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$.

a) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $E(e^{\lambda S_n}) = \prod_{k=1}^n E(e^{\lambda X_k})$.

On suppose *désormais* que $X_k = a_k Y_k$, où Y_k variables de Rademacher (c'est-à-dire $P(Y_k = 1) = P(Y_k = -1) = \frac{1}{2}$).

b) Montrer que $E(e^{\lambda S_n}) = \prod_{k=1}^n \mathrm{ch}(\lambda a_k) \leq \exp(\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_n^2)$, où $\sigma_n^2 = \sum_{k=1}^n (a_k)^2$.

Remarque : Justifier $\mathrm{ch}(t) \leq \exp(\frac{1}{2}t^2)$ en utilisant le développement en série entière.

c) En déduire que pour tous $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $P(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(\frac{1}{2}\lambda^2\sigma_n^2 - \lambda a\right)$.

d) En déduire que $P(|S_n| \geq a) \leq 2\exp\left(-\frac{a^2}{2\sigma_n^2}\right)$, et en conclure que $P(|S_n| \geq \mu\sigma_n) \leq 2\exp\left(-\frac{\mu^2}{2}\right)$.

15) ($\clubsuit$) (*ENS*) *Probabilité de retour à l'origine dans une marche aléatoire.* Soient $p \in]0,1[$ et $q = 1-p$.

a) Montrer que la série $\sum \binom{2n}{n} p^n q^n$ diverge ssi $p = q = \frac{1}{2}$.

b) Marche aléatoires : On considère $Z_n = X_1 + X_2 + ... + X_n$, où les X_k sont des v.a. i.i.d. de loi $\mathcal{B}(p)$.

On pose $a_n = P(S_n = 0)$ et $p_n = P(S_n = 0$ et $\forall k \in \{1, 2, ..., n-1\}$, $S_k = 0)$.

On pose $f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n x^n$ et $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$. Etablir une relation entre $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in]-1,1[$.

Montrer que la probabilité de retour en 0 vaut 1 ssi $p = q = \frac{1}{2}$.

16) ($\clubsuit$) (*X PSI*) Soit $\theta > 0$. Des individus numérotés $1, 2, \ldots,$ arrivent successivement dans un restaurant qui abrite une infinité de tables infiniment longues. Les convives s'installent aux différentes tables avec les conditions suivantes : lorsque le $(k+1)$-ième individu se présente, il choisit au hasard l'un des k individus déjà attablés avec la probabilité $\frac{k}{k+\theta}$ et s'assied à la même table, ou occupe une nouvelle table avec la probabilité $\frac{\theta}{k+\theta}$.

On note K_n la variable aléatoire indiquant le nombre de tables occupées lorsque n individus y ont pris place.

a) Déterminer $P(K_n = 1)$.

b) Soit G_n la fonction génératrice de K_n. Montrer que $G_n(x) = \dfrac{L_n(\theta x)}{L_n(\theta)}$, où $L_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$.

c) Calculer $E(K_n)$ et $V(K_n)$. Donner des équivalents de $E(K_n)$ et $V(K_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

d) Étudier alors le comportement de la suite $(\frac{K_n}{\ln n})$ en $+\infty$.