Oraux. Série n°32. Indications

Lois de probabilité

1) $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = P\left(\bigsqcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq 1$. $\sum_{n=0}^{+\infty} P(\{n\}) = P(\mathbb{N}) = 1$. Si $\sum a_n$ converge, $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$.

2) $|X|^k \leq \max(1, |X|^n) \leq 1 + |X|^n$.

3) Le minimum est atteint pour $aX+b$ projeté orthogonal de Y sur le plan $\mathrm{Vect}(1,X)$ pour le produit scalaire $\langle X, Y\rangle = E(XY)$. On écrit que $\langle Y - aX - b, 1\rangle = \langle Y - aX - b, X\rangle = 0$, et on résout le système.

4) a) Pour toute partie $I \subset \{1, 2, ..., r\}$, $n \in (\cap_{i\in I} A_i)$ ssi $q = \prod_{i\in I} p_i$ divise n.
On a donc $P(\cap_{i\in I} A_i) = \frac{n/q}{n} = \prod_{i\in I} \frac{1}{p_i} = \prod_{i\in I} P(A_i)$.
b) Les $\overline{A_i}$ sont mutuellement indépendants. Donc $\frac{\varphi(n)}{n} = P(\cap_{i=1}^{r} \overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{r} P(\overline{A_i}) = \prod_{i=1}^{r}(1 - \frac{1}{p_i})$.

5) On pose $Z = Y - X + 1$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $P(Z = k \mid Y = n) = P(X = n + 1 - k \mid Y = n) = \frac{1}{n}$.
Montrer que $Y - X + 1$ et X suivent la même loi pour toute loi conditionnelle $Y = n$, donc ont même loi.

Probabilités sur des ensembles finis et combinatoire

6) Posons $X = \sum_{j=1}^{n} X_j$, où $X_j(\sigma) = 1_{\sigma(j)=j}$, c'est-à-dire $X_j(\omega) = 1$ si $\omega(j) = j$ et 0 sinon.
Comme X_j suit une loi de Bernoulli $\mathcal{B}(\frac{1}{n})$. Par conséquent, $E(X_j) = \frac{1}{n}$ et $V(X_j) = \frac{n-1}{n^2}$.
Et $\forall i \neq j$, $E(X_iX_j) = P(X_i = 1)P(X_j = 1 \mid X_i = 1) = \frac{1}{n(n-1)}$, donc $\mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n(n-1)} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{n^2(n-1)}$.
Donc $E(X) = n \times \frac{1}{n} = 1$ et $V(X) = n \times \frac{n-1}{n^2} + n(n-1) \times \frac{1}{n^2(n-1)} = 1$.

6) bis) La probabilité qu'un couple survive est $\binom{2n-2}{r}/\binom{2n}{r} = \frac{(2n-r)(2n-r-1)}{2n(2n-1)}$.
$N = \sum_{i=1}^{n} X_i$, où X_i est la fonction indicatrice de A_i : "Le i-ième couple survit". Donc $E(N) = \frac{(2n-r)(2n-r-1)}{2(2n-1)}$.

7) a) La loi de Y sachant $X = n$ est la loi $\mathcal{B}(n, q)$. Montrons que Y suit la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda p)$
Donc $P(Y = k) = \sum_{n=k}^{+\infty} \binom{n}{k} p^k q^{n-k} \times e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}\sum_{m=0}^{+\infty}\frac{(q\lambda)^n}{m!} = e^{-\lambda}\frac{p^k\lambda^k}{k!}e^{q\lambda} = \frac{(p\lambda)^k}{k!}e^{-p\lambda}$
b) On écrit $X = \sum_{i=1}^{n} Z_i$, avec $Z_i \sim \mathcal{B}(r)$, et alors $Y = \sum_{i=1}^{n} Z_iT_i$, avec $T_i \sim \mathcal{B}(p)$. Donc Y suit la loi $\mathcal{B}(n, pr)$.
En prenant $r = \frac{\lambda}{n}$, on a bien les convergences en loi $\mathcal{B}(n, r) \to \mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{B}(n, pr) \to \mathcal{P}(p\lambda)$.

8) Notons Y_k le numéro du tirage donnant la boule k. On a $P(X \leq k) = P(Y_1 \leq k, Y_2 \leq k, Y_3 \leq k)$.
Par la formule de l'intersection, on a :
$P(Y_1 \leq k, Y_2 \leq k, Y_3 \leq k) = P(Y_1 \leq k)P(Y_2 \leq k \mid Y_1 \leq k)P(Y_3 \leq k \mid Y_1 \leq k, Y_2 \leq k) = \frac{k}{n}\frac{k-1}{n-1}\frac{k-2}{n-2}$.

Autre : Notons Z_j le numéro de la boule tirée au j-ième tirage. On a $P(X \leq k) = P(\forall j > k,\ Z_j > 3)$.
Par la formule de l'intersection (on choisit Z_n, puis Z_{n-1}, ...), on a donc $P(X \leq k) = \frac{n-3}{n}\frac{n-4}{n-1}\cdots\frac{k-2}{k+1} = \frac{k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)}$.

Argument combinatoire : $P(X \leq k) = \binom{k}{3}/\binom{n}{3}$: on considère l'ensemble des 3 positions des boules $1, 2, 3$.

Remarque : Pour calculer directement l'espérance de X, on peut noter que les 4 intervalles entiers définies par positions des 3 boules sur $[\![1, n]\!]$ ont même espérance. Donc $E(X) = 3 + \frac{3}{4}(n-3) = \frac{3}{4}(n+1)$.

On peut retrouver ce résultat en calculant $S = \sum_{k=0}^{n} \frac{k(k-1)(k-2)}{n(n-1)(n-2)} = \frac{1}{4}(n+1)$ et $E(X) = (n+1) - S$. Il suffit d'utiliser $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{3} = \binom{n+1}{4}$, qui peut se prouver en considérant le coefficient en x^{n-4} de $\left(\frac{1}{1-x}\right)^5 = \left(\frac{1}{1-x}\right)^4\left(\frac{1}{1-x}\right)$.
On a en effet $\left(\frac{1}{1-x}\right)^{p+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\binom{p+n}{p}x^n$, car $\frac{(p+1)(p+2)\dots(p+n)}{n!} = \binom{p+n}{n} = \binom{p+n}{p}$.

9) La fonction caractéristique de $B = A_1 \cap \dots \cap A_n$ est $1_B = \prod_{i=1}^{n}(1 - 1_{A_i})$.
En développant et en prenant l'espérance, on obtient $P(B) = \sum_{I\subset\{1,2,\dots,n\}}(-1)^{(\mathrm{card}\, I)}P(\bigcap_{i\in I} A_i)$.

b) On applique a) avec $A_i : \sigma(i) = i$. On a $d_n = P(\overline{B}) = \sum_{I\subset\{1,2,\dots,n\}}(-1)^{(\mathrm{card}\, I)}P(\bigcap_{i\in I} A_i)$.
On a $P(\bigcap_{i\in I} A_i) = (n-k)!$, où $k = \mathrm{card}\, I$. Il y a $\binom{n}{k}$ parties I de cardinal k.
Donc $d_n = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(n-k)!$, d'où on déduit $d_n = n!\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\dfrac{1}{k!}$.

10) a) $P(S_n = n) = \frac{1}{n!}$ et $P(S_n = 1) = P(X_1 = \min_{1\le j\le n} X_j) = \frac{1}{n}$.
b) $P(T_k = 1) = P(X_k = \max_{1\le j\le k} X_j) = \frac{1}{k}$. On a $S_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{T_k}$, donc $E(S_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$.

Remarque : Pour formaliser $P(T_k) = \frac{1}{k}$, regrouper les permutations selon la valeur de $\Delta = \{X_1, ..., X_k\}$.

Remarque : On a aussi $P(T_k) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} P(T_k, X_k = j) = \frac{1}{n}\sum_{j=k}^{n} \binom{j-1}{k-1}/\binom{n-1}{k-1}$.
Or, $\sum_{j=k}^{n}\binom{j-1}{k-1} = \binom{n}{k}$, donc on obtient bien $P(T_k) = \frac{1}{k}$.

Variables aléatoires entières

11) La série génératrice $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ doit vérifier $\forall x \in]-1, 1[$, $f(x)^2 = f(x^2)$.
En considérant le terme non nul a_p de plus petit degré, on obtient $a_p = 1$, donc X cste presque sûrement.

Convergence de variables aléatoires

12) Posons $Z_n = \frac{1}{n}S_n$ et $\lambda_n = E(Z_n)$. On a par Cesàro $\lim_{n\to+\infty} \lambda_n = \mu$.
On a $E((Z_n-\mu)^2) = E((Z_n-\lambda_n)^2 + (\lambda_n-\mu)^2 = V(Z_n) + (\lambda_n-\mu)^2$.
On a $V(Z_n) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = O\left(\frac{1}{n}\right)$. On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} E((Z_n-\mu)^2) = 0$.
Par Markov, $P(|Z_n-\mu| \le \varepsilon) \le \dfrac{E((Z_n-\mu)^2)}{\varepsilon^2} \to 0$ lorsque $n \to +\infty$.

13) a) On a $E(S_n) = nx$, donc $\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^2 P(S_n = k) = E((S_n - E(S_n))^2) = V(S_n) = n(x-x^2)$.
On en déduit (cf BT) que $\forall\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to+\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}(S_n - x\right| > \varepsilon\right) = 0$ (cf loi faible des grands nombres).
b) Posons $\alpha(\varepsilon) = \sup_{|t-x|\le\varepsilon} |f(t) - f(x)|$. On a $\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha(\varepsilon) = 0$, car f est continue en x.
On a $|Q_n - f(x)| = \left|E\left(f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x)\right)\right| \le E\left(\left|f\left(\dfrac{S_n}{n}\right) - f(x)\right|\right)$. On distingue les cas $\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \le \varepsilon$ et $> \varepsilon$.
Donc $E(|Q_n - f(x)|) \le \alpha(\varepsilon) \times P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \le \varepsilon\right) + 2\sup|f| \times P\left(\left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| > \varepsilon\right) \to 0$.
Remarque : De façon générale, si $Z \le \alpha$ sur A, et sachant que $Z = Z.1_A + Z.1_{\overline{A}}$, on a :
$E(Z) \le \alpha \times P(A) + (\sup Z) \times P(\overline{A}) \le \alpha + (\sup Z)\, P(\overline{A})$. Ici on prend $Z = |Q_n - f(x)|$ et $A : \left|\dfrac{S_n}{n} - x\right| \le \varepsilon$.

13) bis) a) $|\phi_n(x) - \phi(x)| = \left|E(\phi(S_n^{(x)}) - \phi(x))\right| \le K\ E\left(\left|S_n^{(x)} - x\right|\right) \le K\sqrt{V(S_n^{(x)})} = \frac{K}{\sqrt{n}}\sqrt{x(1-x)} \le \frac{K}{2\sqrt{n}}$.
b) Soit φ une fonction L-lipchitzienne sur $[a, b]$.
On pose $\phi(x) = \varphi(a + x(b-a))$. L'application φ est K-lipschitzienne, avec $K = (b-a)L$.
On sait que $\lim_{n\to+\infty}\sup_{[0,1]}|\phi_n - \phi| = 0$.
On a $\forall t \in [a, b]$, $\varphi(t) = \phi(\frac{t-a}{b-a})$, donc $\lim_{n\to+\infty}\sup_{[a,b]}|P_n - \varphi| = 0$, où $P_n(t) = \phi_n(\frac{t-a}{b-a})$.
Comme $\phi_n(x)$ est un polynôme en x, alors $P_n(t)$ est un polynôme. D'où le résultat.

14) a) Les variables alétaoires $e^{\lambda X_k}$ sont indépendantes.
b) On a $E(e^{\lambda X_k}) = \frac{1}{2}(e^{\lambda a_k} + e^{-\lambda a_k}) = \mathrm{ch}(\lambda a_k)$, donc $E(e^{\lambda S_n}) = \prod_{k=1}^{n}\mathrm{ch}(\lambda a_k)$.
On vérifie que $\mathrm{ch}\, x \le \exp(\frac{1}{2}x^2)$ en utilisant par le DSE : $\frac{1}{(2n)!} \le \frac{1}{2^n(n!)}$.
c) Comme la loi de S_n est symétrique, $P(|S_n| \ge a) = 2P(S_n \ge a)$.
On a $P(S_n \ge a) \le P(e^{\lambda S_n} \ge e^{\lambda a}) \le \dfrac{E(e^{\lambda S_n})}{e^{\lambda a}}$ par Markov, et on conclut avec b).
d) On choisit λ de sorte à minimiser $\dfrac{1}{2}\lambda^2\sigma_n^2 - \lambda a$, donc on prend $\lambda = \dfrac{a}{\sigma_n^2}$.

15) a) Utiliser la formule de Stirling ou bien la règle de d'Alembert.
b) On a $f(x) = 1 + f(x)g(x)$, d'où on déduit $g(1) = 1$ ssi $\lim_{x\to 1, x<1} f(x) = +\infty$.

16) a) On note A_k l'événement : “ Le $(k+1)$-ième individu occupe une nouvelle table ”.
Les événements A_k sont mutuellement indépendants.

On a $P(K_n = 1) = P(A_1 \cap ...A_n) = \prod_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{i+\theta}$.

b) On a $K_n = \sum_{i=0}^{n-1} 1_{A_i}$, donc $G_n(x)$ es tle produit des séries génératrices des A_i, qui sont les $\dfrac{i+\theta x}{i+\theta}$.

Donc $G_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1} \dfrac{i+\theta x}{i+\theta} = \dfrac{L_n(\theta x)}{L_n(\theta)}$, où $L_n(x) = \prod_{i=0}^{n-1}(x+i)$.

c) On a $E(K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} E(A_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\theta}{i+\theta}$ et $V(K_n) = \sum_{i=0}^{n-1} V(A_i) = \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{\theta}{i+\theta} - \left(\frac{\theta}{i+\theta}\right)^2 \right)$.

La série $\sum_i \left(\frac{\theta}{i+\theta}\right)^2$ converge. Par comparaison avec une intégrale, on a $E(K_n) \sim \theta \ln n$ et $V(K_n) \sim \theta \ln n$.

d) On a $E\left(\frac{K_n}{\ln n} - \theta\right) \to 0$ et $V\left(\frac{K_n}{\ln n} - \theta\right) = O\left(\frac{1}{\ln n}\right) \to 0$.

On en déduit que $\left(\frac{K_n}{\ln n}\right)$ converge en probabilités vers la constante θ.