Oraux. Série n°30. Fonctions de plusieurs variables et calcul différentiel. Indications

Extrema

1) $K = \{(x,y) \mid x > 0,\ y > 0,\ x^2+y^2 \leq 3 \text{ et } xy \geq \frac{1}{3}\}$ est compact et tel que $\inf f(\Delta) = \inf f(K)$.

En effet, on a $\forall (x,y) \in (\Delta \setminus K)$, $f(x,y) \geq 4 = f(1,1)$ et $(1,1) \in K$. Donc il existe $(a,b) \in K$ tel que $\inf f = f(a,b)$.

Comme $(a,b) \in \Delta$ et Δ ouvert, alors $\operatorname{grad} f(a,b) = (0,0)$, donc $2a^3b = 1 = 2ab^3$, donc $a = b = 2^{-1/4}$.

2) a) Supposons par l'absurde qu'il existe a et b vérifiant $f(a) < f(c) < f(b)$.

On considère deux chemins (continus) reliant a et b et ne se croisant pas. Par le TVI appliqué à la fonciton f le long du chemin, il existe donc un point sur chaque chemin dont l'image par f vaut $f(c)$.

Donc $f^{-1}(\{f(c\})$ n'est pas un singleton.

b) Poser $A = \{x \mid f(x) \leq c\}$ et $B = \{x \mid f(x) \geq c\}$. Supposer par l'absurde A et B non bornés, et considérer des chemins reliant A et B sans rencontrer la boule de rayon R, avec R arbitrairement grand.

Fonctions continues et fonctions continûment différentiables (= de classe C^1)

3) On a $|f(x,y)| \leq |xy| \leq \|\overrightarrow{x}\|^2$, donc $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$. On prolonge par continuité par $f(0,0) = 0$.

On a pour $(x,y) \neq (0,0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y \sin(\frac{1}{x^2+y^2}) + \frac{2x^2y}{(x^2+y^2)^2}\cos(\frac{1}{x^2+y^2})$.

On trouve aisément une suite $(x_n,y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergant vers 0 telle que $\lim_{n\to+\infty} \frac{\partial f}{\partial x}(x_n,y_n) = +\infty$.

Il suffit en effet de choisir $(x_n,y_n) = (\sqrt{\frac{1}{4n\pi}}, \sqrt{\frac{1}{4n\pi}})$: On a $\frac{1}{x_n^2+y_n^2} = 2n\pi$ et $\frac{x_n^2 y_n}{(x_n^2+y_n^2)^2} \sim \frac{(2n\pi)^2}{(4n\pi)^{3/2}} \to +\infty$.

4) On utilise $f(x,y) = \int_0^1 g'(x+t(y-x))\, dt$.

On a alors $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \int_0^1 (1-t)g'(x+t(y-x))\, dt$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \int_0^1 tg'(x+t(y-x))\, dt$.

Par caractérisation séquentielle et convergence dominée, $\frac{\partial f}{\partial x}$ est continue sur $\mathbb{R}^2$. De même pour $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Fonctions de plusieurs variables

5) Soit $x \in \mathbb{R}^n$. Avec $g(t) = f(tx)$, on a $f(x) = f(0) + \int_0^1 \operatorname{grad} f(tx) \cdot x\, dt$. Donc $g_k(x) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_k}(tx)\, dt$.

La continuité des g_k résulte de la continuité des intégrales à paramètre (ou plus précisement, cv dominée).

Il n'y a pas unicité : Par exemple, avec $n = 2$ et $f(x,y) = xy$, les couples $(g_1,g_2) = (y,0)$ et $(0,x)$ conviennent.

Remarque : Si f est de classe C^p, les fonctions sont de classe C^{p-1}.

Equations aux dérivées partielles

6) On pose donc $f(x_1,...,x_n) = g(x_1^2+...+x_n^2)$.

On a $\frac{\partial f}{\partial x_j}(X) = 2x_j g'(x_1^2+...+x_n^2)$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(X) = 2g'(x_1^2+...+x_n^2) + 4x_j^2 g''(x_1^2+...+x_n^2)$.

Donc $\Delta f(X) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(X) = 2ng'(\|X\|^2) + 4\|X\|^2 g''(\|X\|^2)$.

Ainsi, $\Delta f = 0$ ssi $\forall r > 0$, $2ng'(r) + 4r\ g''(r) = 0$, c'est-à-dire $g'(r) = Ar^{-n/2}$.

Lorsque $n = 2$, on obtient $g(r) = A \ln r + B$. Lorsque $n \neq 2$, on obtient $g(r) = Ar^{-(2-n)/2} + B$

Par exemple, pour $n = 3$, les solutions sont les $f(x_1,...,x_n) = A\|X\|^{-1} + B$.

6) bis) (*Centrale*)

Soient $f \in C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ et F définie sur $D = \mathbb{R}^n \setminus \{(0,0,...,0)\}$ par $F(x_1,...,x_n) = f(x_1^2+...+x_n^2)$.

7) c) Se ramener à $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ ou à $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$ avec $g(u,v) = f(x,y)$ changement de variable affine.

Solution : c) Si $a \neq b$, on prend $g(u,v) = f(u+v, au+bv)$, donc $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y}$.

On se ramène alors à $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$, c'est-à-dire $g(u,v) = \varphi(u) + \psi(v)$, et on déduit $f(x,y)$.

Si $a = b$, on prend $g(u,v) = f(u, au+v)$, donc $\frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} + a\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2a\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + a^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

On se ramène alors à $\frac{\partial^2 g}{\partial u^2} = 0$, c'est-à-dire $g(u,v) = \varphi(v) + u\psi(v)$, et on déduit $f(x,y)$.

8) Par Schwarz, on a anécessairement $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}$. Réciproquement, supposons que tel est le cas.

$\frac{\partial f}{\partial x} = u$ équivaut à $f(x,y) = \varphi(y) + \int_0^x u(t,y)\ dt$. On a alors $\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y) + \int_0^x \frac{\partial u}{\partial y}(t,y)\ dt = \varphi'(y) + \int_0^x \frac{\partial v}{\partial x}(t,y)\ dt$.

On obtient donc $\frac{\partial f}{\partial y} = \varphi'(y) + v(x,y) - v(0,y)$. Donc les solutions sont les $f(x,y) = k + \int_0^y v(0,t)\ dt + \int_0^x u(t,y)\ dt$.

9) On a $g(x) = g(0) + \int_0^1 \operatorname{grad} g(tx) \cdot x\ dt$. Ainsi, $\operatorname{grad} g = 0$ implique $g(x) = g(0)$ constante.

Donc $\dfrac{\partial f}{\partial x_j} = a_j$ constante, et à nouveau, $f(x) = f(0) + \int_0^1 \operatorname{grad} f(tx) \cdot x\ dt = f(0) + \sum_{j=1}^n a_j x_j$.

Réciproque immédiate.

10) a) Considérer $f(z+tv)$, avec $v \in H_0 : \sum_{i=1}^n a_i x_i = 0$. En déduire que $\forall v$, $\operatorname{grad} f(z) \cdot v = 0$.

b) Pour tout $v \in G$, considérer $g(t) = f(a+tv)$, et noter que $g(0) = \sup_{t\in\mathbb{R}} g(t)$.

11) a) ($\Leftarrow$) Th de Schwarz ; ($\Rightarrow$) Considérer $U(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x\ dt = \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 f_j(tx)\ dt$:

On a $\frac{\partial U}{\partial x_i}(x) = \int_0^1 f_i(tx)\ dt + \sum_{j=1}^n x_j \int_0^1 t\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(tx)\ dt = \int_0^1 f_i(tx)\ dt + \int_0^1 t\frac{d}{dt}(f_i(tx))\ dt = f_i(x)$, car $\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}$.

b) Résulte de Schwarz et de $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = -\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}$; utiliser $\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_j \partial x_k} = -\dfrac{\partial^2 f_j}{\partial x_k \partial x_i} = \dfrac{\partial^2 f_k}{\partial x_i \partial x_j} = -\dfrac{\partial^2 f_i}{\partial x_k \partial x_j}$.

En déduire que $A(x)$ est constant (et antisymétrique), puis utiliser $f(x) = f(0) + \int_0^1 A(tx) \cdot x\ dt$.

12) a) On a $f(x) = f(0) + \int_0^1 \operatorname{grad} f(tx) \cdot x\ dt$. b) Se ramener d'abord à N norme euclidienne.

Fonctions harmoniques

13) a) On a $\dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta) = \cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + \sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta} = -r\sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x} + r\cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

Donc $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} = \cos^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2\sin\theta\cos\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \sin^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = r^2\sin^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\sin\theta\cos\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + r^2\cos^2\theta\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} - r\cos\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\ \dfrac{\partial f}{\partial x}$.

On conclut $\dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial g}{\partial r} + \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ avec $\cos^2 + \sin^2 = 1$.

b) On a $J(r) = \int_0^{2\pi} g(r,\theta)\ d\theta$.

Par le th de dérivation des intégrales paramétrées, on a $J'(r) = \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial g}{\partial r}(r,\theta)\ d\theta$ et $J''(r) = \int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 g}{\partial r^2}(r,\theta)\ d\theta$

Donc par a), $J''(r) + \dfrac{1}{r}J'(r) = \int_0^{2\pi} \Delta f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta)\ d\theta - \dfrac{1}{r^2}\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}(r,\theta)\ d\theta$.

Or, $\theta \longmapsto g(r,\theta)$ est 2π-périodique, donc $\theta \longmapsto \dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)$ l'est aussi.

On en déduit que $\int_0^{2\pi} \dfrac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} r,\theta)\ d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\dfrac{\partial g}{\partial \theta}(r,\theta)\right]_0^{2\pi} = 0$, d'où le résultat.

c) Supposons i). Alors $J''(r) + \dfrac{1}{r}J'(r) = 0$, donc $J'(r) = \dfrac{a}{r}$, et $J(r) = a\ln r + b$, avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

Mais J admet une limite en 0, qui vaut $2\pi f(x_0, y_0)$ (par continuité des intégrales paramétrées).

Donc $a = 0$, puis $b = 2\pi f(x_0, y_0)$, donc $J(r) = 2\pi f(x_0, y_0)$, $\forall r \geq 0$. D'où ii).

Réciproquement, supposons ii). Alors J est contante, donc par 1), on a $\forall r > 0$, $\int_0^{2\pi} \Delta f(M_0 + re^{i\theta})\ d\theta = 0$.